Univerzita Karlova

Pedagogická fakulta

Katedra matematiky a didaktiky matematiky

DIPLOMOVÁ PRÁCE

PODNĚTNÁ VÝUKA OBSAHU TROJÚHELNÍKU A ROVNOBĚŽNÍKU VE DVOU TŘÍDÁCH S ODLIŠNOU ZKUŠENOSTÍ S VÝUKOU MATEMATIKY

Constructivist teaching of the area of a triangle and parallelogram in two classes with a different background in teaching mathematics

Bc. Pavel Sovič

Vedoucí diplomové práce: doc. RNDr. Naďa Vondrová, Ph.D.

Studijní program: Učitelství pro střední školy

Studijní obor: N M

PRAHA 2016

Prohlášení

Tuto práci jsem vypracoval samostatně, veškeré literární prameny a informace, které jsem v práci využil, jsou uvedeny v seznamu použité literatury.

Byl jsem seznámen s tím, že se na moji práci vztahují práva a povinnosti vyplývající ze zákona č. 121/2000 Sb., autorský zákon, zejména se skutečností, že Univerzita Karlova má právo uzavření licenční smlouvy o užití této práce jako školního díla podle § 60 odst. 1 autorského zákona, a s tím, že pokud dojde k užití této práce mnou nebo bude poskytnuta licence o užití jinému subjektu, je Univerzita Karlova oprávněna ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které na vytvoření díla vynaložila, a to podle okolností až do jejich skutečné výše.

Souhlasím s prezenčním zpřístupněním své práce v Univerzitní knihovně Univerzity Karlovy.

V Praze dne 1. 7. 2016

Bc. Pavel Sovič

Poděkování

Srdečně děkuji vedoucí mé diplomové práce doc. RNDr. Nadě Vondrové, Ph.D. za odborné vedení, cenné rady, inspiraci, trpělivost, ochotu a čas, které mi v průběhu zpracování této práce věnovala. Také děkuji Mgr. Martině Josefové za inspiraci při tvorbě úloh, reflexi hodin, a za cenné rady z oblasti matematiky prvního stupně. Rád bych také poděkoval PhDr. Veronice Laufkové, Ph.D. a PhDr. Martině Filípkové za pomoc při jazykové korektuře. V neposlední řadě děkuji své rodině, přátelům a kolegům ze základní školy za podporu při psaní této práce.

Abstrakt

Práce se zabývá konstruktivistickými přístupy k výuce matematiky na základní škole, tedy takovými přístupy, které do centra výuky staví žáka. Na základě studia literatury, analýzy učebnic a zejména v souladu s teorií generických modelů jako teorie popisující způsob budování žákovských poznatků byla připravena výuka pojmu obsah trojúhelníku a rovnoběžníku. Experimentální výuka byla realizována ve dvou 7. třídách s odlišnou zkušeností s výukou matematiky na 1. stupni. Jedna třída byla vyučována podle silně instruktivní řady učebnic, zatímco druhá třída podle učebnice, která je v souladu s principy konstruktivismu zacílena na žáka a umožňuje individualizaci výuky. Hlavním cílem práce bylo popsat experimentální výuku v obou třídách a zhodnotit ji ze dvou hledisek. V první řadě kvalitativně na základě analýzy videozáznamů výuky, řešení žáků, terénních poznámek, záznamů obrazovky na interaktivní tabuli, ale také z pohospitačních rozborů hodin přítomných učitelek. V druhém případě kvantitativně na základě pre- a post-testů. Kvalitativní analýza je zaměřená hlavně na klíčové objevy a situace během výuky a hodnocení zapojení žáků do výuky. V konstruktivisticky vedené třídě se objevil náznak generického modelu již v první hodině a ve čtvrté hodině ho většina žáků byla schopna sama formulovat. Naopak ve druhé třídě, zvyklé spíše na instruktivní výuku, muselo být využito směrování, aby alespoň v poslední hodině někteří žáci objevili generický model. I přes rozdílný vývoj v jednotlivých třídách byl jak u 7. B, tak u 7. C zaznamenán znatelný posun ve znalostech v oblasti míry doložený zejména výsledky post-testu. Na základě analýzy jsou v závěru hodnocení výukového experimentu navrženy mírné úpravy výukového plánu, zejména časového charakteru.

Klíčová slova

obsah trojúhelníku, obsah rovnoběžníku, konstruktivismus, teorie generických modelů, podnětné vyučování, poznávací proces, objevování

Abstract

The thesis deals with constructivist approaches to teaching mathematics in lower secondary school, which means that a pupil is the centre of learning process. Based on study of literature, textbook analysis, and, in particular, in accordance with the theory of generic models as a theory describing way to build pupils' knowledge, a teaching experiment was prepared, focusing on the area of triangle and parallelogram. Experimental lessons were realized in two 7 grade classes with different experience with being taught mathematics at the elementary school. One class was taught by a highly instructive series of textbooks, while the second by textbooks which respected the principles of constructivism aimed at pupils and allowed individualization of learning process. The main objective of the thesis is to describe the experimental education in both classes and evaluate it from two perspectives. First of all, qualitatively, by analysing video recordings of lessons, pupils' solutions, notes from lessons, print screens from interactive whiteboard, but also by examining attendance sheets from teachers observing some lessons. In the second case, quantitatively, based on pre- and post-tests. The qualitative analysis is mainly focused on key discoveries and didactical situations in teaching and on an assessment of pupils' participation in teaching. In the constructivist classroom, the process was faster. A generic model was observed already in the first lesson and by the fourth lesson it was applied by the majority of pupils. Conversely, in the second class, used mainly to instructive lessons, some clues had to be employed for some pupils to discover a generic model at least during the last lesson. Despite the different developments in individual classes, a noticeable increase in the degree of knowledge was observed in both 7. B and 7. C, evidenced in particular from the results of the post-test. Based on the analysis, minor adjustments of the lesson plan, especially in time management, are suggested in the conclusion of the educational experiment assessment.

Keywords

area of triangle, area of parallelogram, constructivism, theory of generic models, inspiring teaching, learning process, discovering

Obsah

1 Úvod

„Mezi matematické pojmy, které se vyvinuly z potřeb praxe lidí ve společnosti, nutno bezesporu zařadit např. pojmy úsečka a její délka, geometrický útvar a jeho obsah, těleso a jeho objem.“ (Kouřim, Kuřina, Šedivý, 1985, s. 72) Název geometrie vychází z řeckých slov *gé* čili země a *metrein* – měřit. V antickém Řecku a Římě se geometrie zabývala především „měřením země“. Řekům se podařilo nalézt způsob, jak uchopit a popsat prostor kolem sebe a využít této techniky při řešení problémů běžného života, ať už se jednalo o dláždění cest, stavbu domů, nebo kupříkladu o výměry pozemků. Ukázalo se, že hledání velikosti (míry) geometrických útvarů je pro lidstvo důležitou dovedností napomáhající rozvoji evropské kultury.

Otázkou ovšem zůstává, zda o této spojitosti s reálným světem, poměrně velké bohatosti geometrie a její důležitosti pro život vědí i žáci na základních školách. Proč se pro ně stává tato oblast největším „strašákem“ matematiky? Z jakého důvodu jim mnohdy chybí geometrická představivost? Proč se leckdy tak důležitá oblast matematiky omezuje ve výuce na základních školách pouze na systém vzorců a vyžadované znalosti geometrických pojmů? Proč právě v oblasti míry ukazují výsledky mezinárodních šetření na nedostatečné znalosti českých žáků?

Domnívám se, že žákům je obvykle dán malý prostor pro manipulaci, tvoření, kreativitu a objevování. Rozmanitost geometrických problémů v oblasti míry se často redukuje pouze na dosazování do předem neprozkoumaných vztahů. Faktem je, že většina lidí se alespoň jednou v životě s řešením nějakého praktického geometrického problému setká, ať už je to dlaždičkování koupelny, koupě pozemků, stěhování nábytku nebo obyčejné balení vánočního dárku. Není tedy právě v těchto případech geometrie vhodným prostředkem k tomu, aby žáci pochopili užitečnost matematiky v osobním životě?

Nejen z těchto důvodů je má diplomová práce věnována právě oblasti geometrie, konkrétně didaktice obsahů základních geometrických obrazců – rovnoběžníku a trojúhelníku, které spolu úzce souvisí a které považuji za klíčové pro pochopení objemů a povrchů těles. Prakticky ve všech útvarech, které nás v životě obklopuji, můžeme nalézt právě trojúhelníky. Nejen z vlastní zkušenosti studia na gymnáziu, na základě absolvovaných praxí na školách a výsledků mezinárodních testování zveřejněných Českou školní inspekcí, ale také na základě mé dvouleté učitelské praxe musím však konstatovat, že tematika obsahů je ve školních vzdělávacích programech dlouhodobě podceňována a také aplikačně velice vzdálena od základní podstaty tohoto oboru. Za vysloveně kritickou ji označili i autoři Vondrová a Rendl ve své publikaci *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků* (2015).

Cílem mé diplomové práce tedy je navrhnout jednu z možných koncepcí metodiky tohoto tématu, která by eventuálně mohla posloužit jako zdroj inspirace pro další učitele. Kromě samotného návrhu plánu výuky popisuji přístup k výuce samotné, tedy zaměření na žákův pojmotvorný proces, jeho myšlenkové pochody a způsob nabývaní poznatků v oblasti matematiky. Některé koncepty se v lidské mysli vyvíjely po několik staletí, proč tedy my, učitelé, máme pocit, že vše se dá udělat za „dvě hodiny“? Žákova mysl je něco živého a stále se vyvíjejícího a některé úvahy vyžadují větší množství času na jejich vykrystalizování, „zesítění“ a začlenění do mentální struktury. Už Descartes v 17. století ve své *Rozpravě o metodě* tvrdil, že myšlenky mají být vyvozovány v pořadí, závisejícím na jednoduchosti předmětu, a to od nejjednodušších a nejsnáze poznatelných k nejsložitějším (Descartes, 1992). I proto mi jsou blízké myšlenky konstruktivismu, kde předmětem vzdělávacího procesu není učitel předávající hotové informace, ale žák, který si buduje strukturu ve své vlastní mysli od jednotlivých poznatků až k abstraktním celkům. Celá práce proto vychází především z výzkumů M. Hejného a jeho *teorie generických modelů*, souznící právě s myšlenkami konstruktivismu.

V diplomové práci nejprve představuji charakteristiky a specifika výuky matematiky orientované na žáka, čili podnětné výuky, a též přibližuji podstatu žákova pojmotvorného procesu. Velký vliv na učební proces mají samozřejmě i využívané didaktické materiály, které slouží učitelům jako inspirace, proto je další část práce zaměřena na analýzu učebnic využívaných na prvním stupni, a to z hlediska pojmu obsah. Následně na základě teoretických poznatků je ve druhé části mým cílem vytvořit a ověřit v praxi výukové plány pro výuku obsahů rovnoběžníků a trojúhelníků. Výukové experimenty byly provedeny v 7. ročníku na základní škole ve dvou třídách s odlišnou zkušeností s výukou matematiky na prvním stupni. V závěru na základě analýzy pre-testu, nahrávek z výukových experimentů, pohospitačních formulářů, fotografií z výuky, záznamů obrazovky z interaktivní tabule a z post-testu představuji, jak probíhal pojmotvorný proces v oblasti obsahu v obou třídách a také to do jaké míry si žáci probíranou látku osvojili.

V příloze práce je k nalezení zadání pre-testu a post-testu, včetně pracovních listů využívaných při výuce.

2 Teoretická část

Budování žákovských poznatků a míra zapojení žáků do procesu učení jsou hlavní témata, která budou předmětem části práce věnované především charakteristikám a specifikům podnětné výuky a žákova poznávacího procesu. Vzhledem k zaměření a tématu práce bude představeno didaktické zpracování tematického celku *obsah*, v němž bude podrobněji popsán žákův poznávací proces, tedy postupné budování poznatků o obsazích útvarů při studiu na základní škole. Dále budou nastíněny konkrétní obtíže žáků v této oblasti.

2.1 Podnětná výuka

Učitel může přistupovat k vyučování různě. V první řadě formou transmisivní, tedy tak, že se snaží přenést informace nebo víceméně hotové poznatky ze svého myšlenkového světa, učebních materiálů nebo tabule do žákovy myšlenkové struktury. Problémem tohoto způsobu přenosu informací ovšem je, že je založený zejména na paměti, reprodukci bez hlubšího pochopení dané problematiky a bez větší míry zapojení žáka. Žák je v tomto procesu pasivním přijímačem učitelových signálů. Transmise často vede k tzv. formálnímu poznání (Hejný, 2014), tedy k poznání, které není opřeno o konkrétní hlubší poznatek nebo žákovu zkušenost. Žák se často učí matematiku zpaměti a nevidí hlubší souvislosti mezi určitými poznatky. Například pokud se žák seznamuje s řešením rovnic pouze jako se souborem pravidel a pouček, tak v případě zapomenutí některého z nich ztrácí aparát na jejich vyřešení. F. Kuřina transmisi nazývá tzv. „přeléváním“ a přirovnává ji k encyklopedickému pojetí školy (kdo se kdy narodil a co napsal…). (Kuřina, 2006)

Další formou přístupu k vyučování je instruktivní vyučování. Jak již význam slova instrukce napovídá, jedná se o formu vzdělávání řízenou pomocí návodů, předpisů nebo pouček (Hejný, 2009). Nejsnadněji se tato organizace výuky dá přirovnat k vaření podle kuchařky, dělání pokusu pomocí návodu nebo k reprodukci algoritmu, např. pro písemné sčítání. Leckdy se tato forma překrývá s formou transmisivní. Oporami obou metod jsou paměť, reprodukce a trénink. Orientace je především na kvantitu a výkon. Kuřina tvrdí: „Vidí-li učitel jako hlavní výsledek své pedagogické práce přípravu žáků na zkoušky orientované „encyklopedicky a výkonnostně“, bude v jeho třídách převládat transmisivní a instruktivní styl: taková jsou fakta, takto řeš daný úkol, to si zapamatuj…“ (Kuřina, 2006, s. 5)

Třetí způsob, konstruktivistický, je zaměřený především na aktivní roli žáka v poznávacím procesu a na budování poznatků v jeho vědomí formou konfrontace nově získaných informací s jeho dosavadními znalostmi v dané oblasti. Je kladen důraz na práci s prekoncepty[1] (Hejný, 2014). Na rozdíl od předchozích dvou teorií hraje učitel v tomto učebním procesu roli facilitátora (Murphy, 1997), tedy toho, kdo učení zprostředkovává, a ne toho, kdo předává poznatky již hotové. Cílem tohoto přístupu není učit žáky učivo pouze odříkat, ale naopak porozumět mu a využít ho v praxi. V rámci toto přístupu jsou využívány výukové metody jako didaktické hry, dramatizace, kooperativní výuka, kritické myšlení, brainstorming, problémové vyučování apod. (Zormanová, 2012, s. 10–12).

Myšlenky konstruktivismu ve světě jsou spojeny se jmény Jean Piaget a John Dewey. První jmenovaný tvrdil, že neexistuje *„žádné poznání, které by bylo výsledkem pouhého zaznamenávání pozorovaného a jež by nebylo strukturováno aktivitou subjektu"* (Piaget, 1979, cit. v Hejný, Kuřina, 2009, s. 192). Dewey kladl důraz na učení zkušeností a kultivaci individuality a je iniciátorem tzv. problémové a projektové výuky. Společně s Piagetem jsou označováni jako představitelé tzv. *kognitivního konstruktivismu*. V literatuře je možné najít i jiné přívlastky k tomuto směru jako *sociální* nebo *radikální konstruktivismus* (Cachová, Vondrová, 2006, s. 3–4).

V českých zemích se v 50. letech 20. století zmiňoval o aktivním zapojení žáků do výuky např. matematik Eduard Čech ve spojitosti s vyučováním geometrie. Tvrdil, že „vyučování je nutno vést tak, aby co nejvíce dávalo příležitost k vlastní aktivní činnosti žáků. Touha po aktivní činnosti je v tomto věku něco nezadržitelného." (Čech, 1955) Nejvýznamnějšími představiteli tzv. didaktického konstruktivismu v našem prostředí jsou Milan Hejný a František Kuřina, kteří ve své knize *Dítě, škola, matematika* shrnuli poznatky o konstruktivistických přístupech k vyučování a formulovali tzv. desatero didaktického konstruktivismu, ze kterého bude práce v následujících úvahách vycházet (Hejný, Kuřina, 2009, s. 194–195, zásady jsou kráceny):

1. Matematika je chápána jako specifická lidská aktivita, ne jen jako její výsledek.
2. Podstatnou složkou matematické aktivity je hledání souvislostí, řešení úloh a problémů, tvorba pojmů, zobecňování tvrzení, jejich prověřování a zdůvodňování.
3. Poznatky jsou nepřenosné, vznikají v mysli poznávajícího člověka.
4. Tvorba poznatků se opírá o zkušenosti poznávajícího.
5. Základem matematického vzdělávání je vytváření prostředí podněcujícího tvořivost.
6. K rozvoji konstrukce poznatků přispívá sociální interakce ve třídě.
7. Důležité je použití různých druhů reprezentace a strukturální budování matematického světa.

[1] Jedná se o subjektivní koncepci opírající se o intuici, individuální zkušenost, která se často liší od skutečného vědeckého poznatku.

8. Značný význam má komunikace ve třídě a pěstování různých jazyků matematiky.
9. Vzdělávací proces je nutno hodnotit minimálně ze tří hledisek: porozumění matematice, zvládnutí matematického řemesla, aplikace matematiky.
10. Poznání založené na reprodukci informací vede k formálnímu poznání.

N. Vondrová (2014) zmiňuje pojem podnětná výuka, kterým označuje veškeré vyučování založené na konstruktivistických přístupech. V této práci bude tento pojem využíván v témže smyslu.

V rámci podnětného vyučování je kladen velký důraz na motivaci. Pokud má žák zkoumat a poznávat něco nového (tedy ne pouze přijímat pasivně informace), je třeba, aby byl nejen motivován praktickým využitím matematiky, ale také by měl zažít pocit úspěchu. Žákům jsou předkládány různé podnětné úlohy a problémy, v jejichž řešení mohou využít své dosavadní matematické poznatky. V průběhu jejich řešení dochází k budování nových poznatků a souvislostí v rámci světa matematiky. Učitel by měl vždy podporovat aktivní přístup žáka k řešení zadaného problému. Schopnost samostatného a kritického myšlení je jedním z dalších principů podnětné výuky. S velkou pravděpodobností se setkáme ve výuce se situací, kdy žák v průběhu svého zkoumání nebo řešení úlohy udělá chybu. Učitel by ji v této situaci neměl vnímat jako jev nežádoucí. Žáci by měli být vedeni k tomu, aby sami odhalili, kde jejich postup nebyl zcela korektní. Učitel by měl tuto informaci brát jako jistou fázi vývoje žákova chápání dané problematiky (Vondrová, 2014, s. 11–13).

Podnětné vyučování je dále charakterizováno velkým prostorem věnovaným diskusi mezi učitelem a žákem, ale zejména diskusi mezi žáky samotnými. Aby tyto debaty sledovaly a plnily výukové cíle a zároveň rozvíjely komunikativní kompetence obsažené v Rámcovém vzdělávacím programu (dále jen RVP), musí být založené na řešení konkrétního matematického problému a hledání jeho podstaty. Učitel by se měl zaměřovat na diagnostiku porozumění, aby nedocházelo k formálnímu poznání. Uzavřené otázky nebo jen opakování formulací zapsaných v sešitě nepomáhá odhalit porozumění látce. Učitel by měl naopak zadávat nestandardně formulované problémy nebo úlohy s více řešeními (Vondrová, 2014, s. 13–15).

V rámci podnětné výuky je též nezbytné umět klást „dobré“ otázky, a to převážně otevřené, na které lze odpovědět jinak než ano/ne nebo např. pouze krátkou jednoslovnou naučenou odpovědí, kterou učitel od žáka očekává. Žáci by otázkami měli být směrováni, ale toto směrování by nemělo vést k omezení okruhu odpovědí. V zahraniční literatuře se objevují dva důležité termíny, které úzce souvisí právě s formou kladení otázek. Jedná se o tzv. *funneling pattern* a *focusing pattern* (Breyfogle, Herbal-Eisenmann, 2005).

V obou případech se jedná o způsob, kdy učitel pokládá žákům sérii otázek, která by měla žáky směrovat a vést k nalezení požadovaného řešení. V prvním případě však učitel otázky stále upřesňuje a (často nevědomky) přebírá kognitivní činnost za žáky a úlohu za ně fakticky řeší. Během učitelova „směrování“ se otázky stále více zužují a i přesto, že žáci dokážou odpovědět na konkrétní dílčí otázky, neznamená to, že mezi otázkami vidí logickou spojitost a že by dokázali původní problém řešit. Vondrová (2014, s. 54) tento proces nazývá „trychtýřování.“

Druhý způsob, *focusing pattern* (nasměrování), označuje takovou interakci mezi učitelem a žáky, kdy učitel pokládá otázky nebo pokyny, které umožňují žákům nad daným problémem ze široka přemýšlet. Kladení otázek tedy žáky spíše směruje a umožňuje jim sledovat věc z jiného úhlu pohledu. Dotazování též napomáhá žákům zaměřit se na konkrétní fakta nezbytná pro samostatné nalezení řešení. Učitel by měl odpovědi žáků pozorně poslouchat, podporovat je v jejich řešitelských strategiích a zároveň by měl být obezřetný, aby se ze „směrování“ nestalo „trychtýřování“ (Breyfogle, Herbal-Eisenmann, 2005).

Ze zde nastíněných principů podnětné výuky, tedy výuky založené na konstruktivistických přístupech, bude vycházet nejen plán experimentální výuky, ale i výuka samotná. Videonahrávky budou podrobeny hodnocení zejména na základě kritérií vycházejících z výše uvedených charakteristik.

2.2 Žákův poznávací proces

Další důležitou proměnnou ve vyučování matematiky, se kterou by měl být každý učitel matematiky obeznámen, je způsob, jakým u žáka pravděpodobně dochází k osvojování poznatků v matematice. K pochopení následující teorie jsou klíčové myšlenky konstruktivismu představené v předchozí části, z nichž plyne zejména fakt, že učení by nemělo být pouze pamětné, ale mělo by být podpořeno pochopením a konkrétní zkušeností se zkoumaným jevem. Právě převaha pamětného učení, velká míra neporozumění látce a z toho vyplývající snaha najít řešení tuto situaci změnit vedla Víta Hejného v letech 1942–1977 k položení základu tzv. *teorie generického* (*univerzálního*[2]) *modelu* (dále jen TGM). Podle něj je totiž znalost poznávacího procesu a jeho zákonitostí nezbytná pro zefektivnění vyučování matematiky (Hejný, 2014, s. 39).

TGM byla dále rozpracovávána a etapizována až do současné podoby, která je představena v knize Milana Hejného (Hejný, 2014) vycházející z knihy *Dítě, škola a matematika* (Hejný, Kuřina, 2009). Poznávací proces žáka je zde rozdělen do pěti etap (viz tab. 2.1).

[2] Starší označení pro generické modely (Hejný, Kuřina, 2009).

Tabulka 2.1: Schéma poznávacího procesu (Hejný, 2014, s. 40)

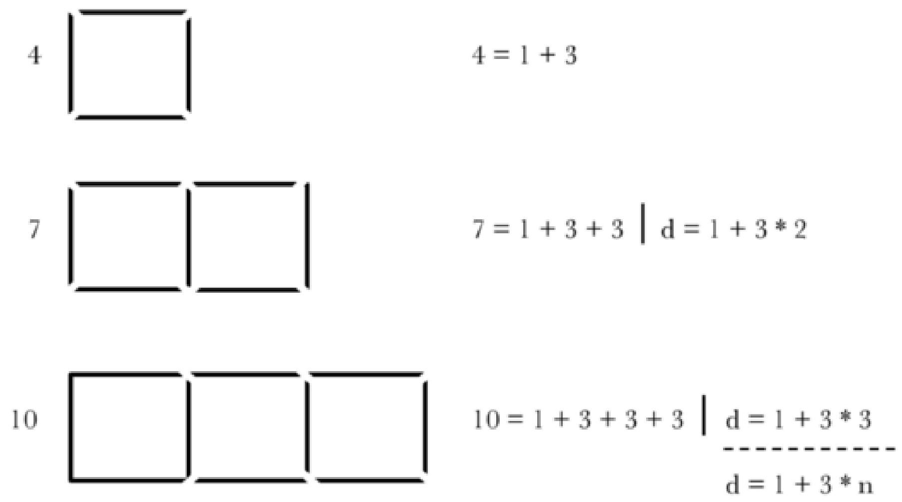
motivace	→	izolované modely	1→	**generický model procesuální → konceptuální**	2→	abstraktní poznatek	→	krystalizace

Vše začíná fází *motivace*. Tato fáze je považována za jednu z nejdůležitějších z celého poznávacího procesu. V případě, že žák není dostatečně motivován, ale pouze stimulován, nedochází ve většině případů k hlubšímu poznávání. V tomto stadiu se jedná o přirozenou potřebu žáka dozvídat se nové věci, jinak řečeno dochází zde k rozporu mezi žákovým „nevím" a „chci vědět". Zdárně vyřešená přiměřená úloha, tedy taková, která není příliš snadná, ale ani příliš složitá, je považována za jeden z nejefektivnějších způsobů motivace žáků k poznávání (Hejný, 2014, s. 40–47).

Další nezbytnou a neopomenutelnou hladinou poznávacího procesu je fáze tzv. *izolovaných* (*separovaných*) *modelů*. Žáci se zde setkávají s konkrétními případy budovaného poznatku a jeho různými reprezentacemi. Vyjasňují si, které modely do dané problematiky spadají a které ne. Velkou roli hraje i hledání vazeb mezi nimi a jejich shlukování a strukturování na základě možných souvislostí. Dostatečné a hluboké studium *izolovaných modelů* by mělo vést žáka k porozumění, ke kterému žák dochází leckdy zcela spontánně (Hejný, 2014, s. 47–50).

Při zkoumání izolovaných modelů má žák možnost objevovat něco nového, hledat nové závislosti a souvislosti, zobecňovat. Právě procesem *zobecnění* se poznávací proces přesouvá z hladiny *izolovaných modelů* do hladiny tzv. *generických* (*univerzálních*) *modelů* (v tabulce 2.1 je přechod označen 1→). Tento přechod je také nazýván *prvním abstrakčním zdvihem*. Jak již bylo nastíněno, *zobecnění* probíhá víceméně spontánně a je doprovázeno jevem, který Hejný ve své knize nazývá AHA-efektem, tedy „náhlým uzřením společné podstaty série izolovaných modelů" (Hejný, 2014, s. 51). Proč právě abstrakční zdvih? Žák již nestuduje každý případ (izolovaný model) zvlášť, izolovaně, ale danou závislost chápe v širších souvislostech a je schopen ji řešit obecně. Přechází tedy od jednotlivého k obecnému. Nalezení g*enerického modelu* pro danou skupinu izolovaných modelů je tedy jinak řečeno nalezení obecného principu, algoritmu, vztahu, popisu situace apod. (Hejný, 2014).

Generické (*univerzální*) *modely* jsou podle Hejného dvojího (eventuálně trojího) typu. V první řadě se jedná o *generický model procesuální*, který se dá nejlépe popsat jako každé jednotlivé žákovo poznání vedoucí k nalezení obecné zákonitosti. *Procesuální model* tedy může platit jen pro určitou podmnožinu izolovaných modelů nebo udávat závislost pouze částečnou, s některými omezeními. Jedná se o velice důležitý mezikrok před nalezením obecné zákonitosti, získávaný empiricky, např. opakováním určitého postupu nebo konkrétní manipulativní činností. Z důvodu nepraktičnosti nebo dokonce neproveditelnosti tohoto získaného postupu se může ukázat, že tento model není zcela vhodný a efektivní. Řešitel tedy cítí potřebu naleznout závislost obecnější. Nalezení takového pravidla, které je aplikovatelné na všechny poznané i budoucí izolované modely, nese označení *generický model konceptuální*. Může být například zapsán formou věty nebo pomocí jednoduché rovnice či schématu. Žák zde již pracuje s „proměnnými“. Je třeba dodat, že v některých případech může nastat i situace, že žáci pro nalezení *konceptuálního modelu* nebudou potřebovat *model procesuální*. Učitel by měl s touto variantou též počítat. *Generický model* dále slouží jako zárodek pro tzv. *abstraktní poznání* (Hejný, 2014).



Obrázek 2.1: Cesta k procesuálnímu a konceptuálnímu generickému modelu (Chrz, Slavík, Štech, 2013, s. 75)

Na obrázku 2.1 je představen modelový průběh žákova poznávacího procesu řešícího otázku: „Jestliže k sestavení čtverce potřebujeme čtyři dřívka, kolik dřívek je potřeba na sestavení 2,3, …, *n* čtverců v řadě těsně za sebou?“ Hledání odpovědi by mělo být zahájeno sestavováním konkrétních *izolovaných modelů*, žák si zapisuje konkrétní spotřebu dřívek a snaží se hledat souvislosti. Při tomto experimentování jsou odhalovány společné vlastnosti, jako například ta, že pro vznik následujícího útvaru je potřeba přidat vždy tři dřívka. Po dostatečném zkoumání zde dochází k abstrakčnímu zdvihu a žák již nepotřebuje sestavovat další útvary a zjišťuje, že součet se dá zapsat jako *1 + určitý počet přičtení čísla tři*. V tomto případě se toto jednoduché pravidlo dá považovat za *generický model procesuální*. Je zde ale vidět, že pokud bychom žákovi zadali větší číslo *n* (např. *n* = 19), přičítání trojky by již nebylo praktické a celkově by počítání bylo velice zdlouhavé, proto přechází žák od *generického modelu procesuálního* ke *generickému modelu konceptuálnímu*, ten je již zapsán jako obecná závislost, platící pro všechny izolované modely. Ve fázi generického modelu se můžeme setkat i se zápisy typu *dřívka = 1 + 3 krát počet kroků* apod. (Hejný, 2014).

Druhým abstrakčním zdvihem se z hladiny generického modelu žák dostává k tzv. a*bstraktnímu poznání*. Poznatek již chápe ve své obecnosti a je schopen ho zapsat například pomocí jazyka písmen, v němž je každé písmeno ve funkci obecného čísla. Právě změna jazyka může být jeden z hlavních indikátorů abstraktního poznání. Poznatek není ve vědomí žáka ukotven jako pouhá informace – formální poznatek (Hejný, 2014).

„Podstata rozdílu mezi generickým modelem a abstraktním poznáním spočívá v tom, že generický model má stejnou úroveň abstrakce, jako mají modely separované, zatímco abstraktní poznání takové ukotvení nemá a je opřeno o jazyk a symboliku. Například prsty jsou generický model pro práci s malými počty. Prsty, stejně jako autíčka, jablka nebo židle mají předmětný charakter. Jestliže ale dítě rozumí slovu „tři" nebo znaku „3" bez dalšího poukazu, pak jeho znalost tohoto objektu je i abstraktní." (Hejný, 2004, s. 35)

Poslední pátou fází TGM je tzv. *krystalizace*. Jedná se o fázi, při které jsou nabyté poznatky pevně začleňovány do různých oblastí žákova vědomí. Žákovi se tak mezi nimi rozšiřuje síť vazeb. Hejný (2014) k hladině *krystalizace* dodává, že tento proces je v tab. 2.1 umístěn nepřesně. *Krystalizace* podle něj probíhá už od počátku objevení prvního generického modelu, u některých případů i ve fázi izolovaných modelů.

2.3 Obsah geometrických útvarů

„Sám termín geometrie (*gé* = země, *metrein* = měřit) poukazuje dostatečně výmluvně na souvislost této disciplíny s praktickou činností lidí. Dnes sice existují celá odvětví geometrie, kde se „obejdeme bez čísel", ale přesto je otázka zavedené velikosti geometrických útvarů prakticky i teoreticky důležitá" (Kouřim, Kuřina, Šedivý, 1985, s. 72).

Citace výše vystihuje velice důležitou roli geometrie v našem životě a její vazbu na praktické činnosti a dovednosti již od pradávna. I proto by geometrie měla být považována za nezbytnou součást školské matematiky. S tím souvisí i nutnost neustále zkvalitňovat didaktiku tohoto oboru. V předchozí části již byla vysvětlena didaktická „paradigmata", ze kterých práce vychází, a nyní je třeba zavést pojmy a podívat se na problém z hlediska matematiky.

2.3.1 Trojúhelník, rovnoběžník a jejich míra

„Množinu bodů na přímce, v rovině nebo v prostoru nazýváme geometrickým útvarem. Uzavřenou oblast v rovině nazýváme obrazcem." (Bartsch, 2006, s. 283) Tato práce se bude zabývat, jak již bylo řečeno, hlavně dvěma obrazci, a to trojúhelníkem a rovnoběžníkem.

Trojúhelníkem se bude dále rozumět následující: „Mějme dány tři různé body A, B, C, které neleží v jedné přímce. Trojúhelník ABC je průnik polorovin ABC, BCA, CAB, tj. množina všech bodů, jež leží zároveň v těchto třech polorovinách. Označuje se symbolicky jako ΔABC.“ (Polák, 2008, s. 424)

Body A, B, C se označují jako vrcholy, úsečky AB, BC, CA jsou strany trojúhelníku a značí se zpravidla a, b, c. Pojmenovávají se podle názvu protějšího vrcholu. Trojúhelníky podle délek jejich stran dělíme na:

a) *rovnostranné* – délky všech tří stran jsou shodné,

b) *rovnoramenné* – délky právě dvou stran (ramen) jsou stejně dlouhé,

c) *různostranné* – žádné dvě strany nejsou stejně dlouhé.

Dále trojúhelníky můžeme dělit podle velikosti jejich vnitřních úhlů na *ostroúhlé*, tedy ty, jejichž všechny úhly jsou ostré (menší než 90°), *pravoúhlé* s jedním pravým úhlem (roven 90°) a zbývajícími úhly ostrými a závěrem na trojúhelníky *tupoúhlé*, v nichž je jeden úhel tupý (větší než 90°) a zbývající dva ostré.

Úsečka vedená vrcholem trojúhelníku k jeho protější straně se nazývá *výška* trojúhelníku. Jejími krajními body jsou vrchol a pata kolmice.

Rovnoběžník je konvexní čtyřúhelník, tedy takový, který nemá vnitřní úhly větší než 180°, kde protější dvojice stran jsou rovnoběžné. Vzdálenost protějších stran se nazývá *výška rovnoběžníku*. Rovnoběžníky jsou známé čtyři, z toho dva pravoúhelníky: čtverec, obdélník, kosodélník, kosočtverec.

Pro potřeby práce je potřeba zavést navíc pojem míra, který je klíčový pro definici obsahu nějakého útvaru.

Mírou v geometrii nazýváme takové zobrazení μ v systému $\mathcal{S}$ porovnatelných geometrických útvarů (tj. geometrických útvarů téhož druhu) do množiny $\mathbb{R}_0^+$, které má tyto vlastnosti $(X, Y, E \in \mathcal{S})$:

a) $X \cong Y \Rightarrow \mu(X) = \mu(Y)$

b) Nemají-li geometrické útvary X a Y žádný vnitřní bod společný, pak $\mu(X \cup Y) =$ $= \mu(X) + \mu(Y)$.

c) Pro nějaký předem zvolený geometrický útvar $E \in \mathcal{S}$ platí $\mu(E) = 1$.

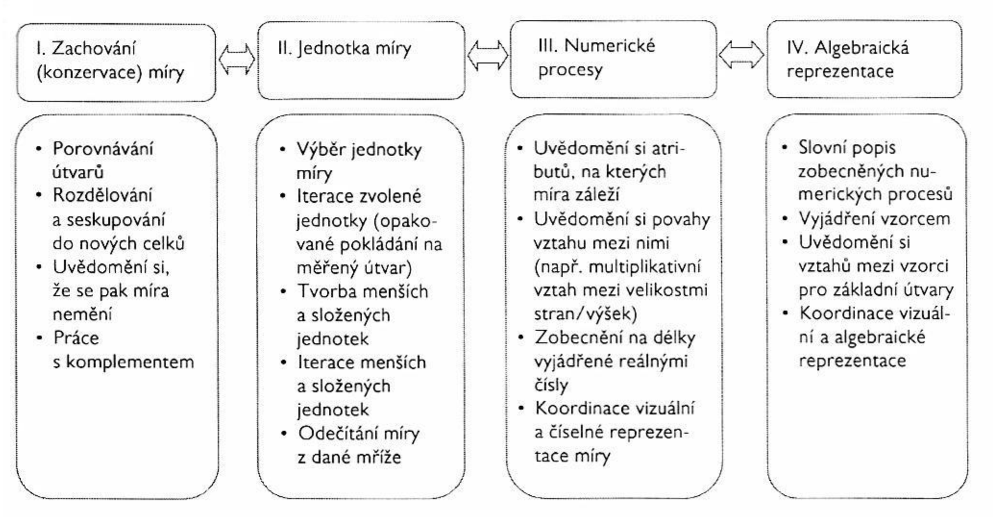
Geometrický útvar E nazýváme *měřící jednotkou míry* μ a hodnotu $\mu(X)$ nazýváme *číselnou velikostí geometrického útvaru* X *při měřící jednotce* E. (Bartsch, 2006, s. 287)

Hodnotu míry $\mu(X): \mathcal{S} \to \mathbb{R}^+$ nazýváme *plošným obsahem obrazce* X. Za obrazec E volíme čtverec se stranou délky 1 a nazýváme ji *plošnou jednotkou* [*jednotkou obsahu, obsahovou* *jednotkou*] (Bartsch, 2006, s. 296). Nejčastějšími jednotkami obsahu jsou jednotlivé čtverečky ve čtvercových sítích různých velikostí, ale také jednotky v metrické soustavě jako mm^2, cm^2, dm^2, m^2 apod. Dále se v práci budeme zabývat mírou plošnou, a tedy význam pojmu míra bude chápán v tomto smyslu, i když význam míry je podstatný i pro prostory s jinou dimenzí. Za zmínku stojí dvě důležité vlastnosti obsahu plynoucí z definice míry, a to konkrétně:

a) Každé dva shodné obrazce mají sobě rovné obsahy.
b) Pokud máme nějaký obrazec složen z několika nepřekrývajících se geometrických obrazců, tak je jeho obsah roven součtu obsahů těchto obrazců. (Polák, 2008, s. 498) Tento princip se nazývá konzervace (zachování) míry (v tomto kontextu obsahu).

2.3.2 Pojmotvorný proces míry v geometrii

V této části budeme vycházet z poznatků Vondrové z kapitoly *Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles* (2015). Uchopení míry je velice složitý proces, který neprobíhá lineárně a skládá se z mnoha fází, ke kterým je třeba se cyklicky vracet, zejména v případě budování nových poznatků. Vondrová (2015, s. 255) s odkazem na práci (Battista, 2007) a (Curry, Mitchelmore, Outhred, 2006) předkládá ve své publikaci schéma tohoto procesu, které je možné vidět na obrázku 2.2.



Obrázek 2.2: Schéma pojmotvorného procesu míry v geometrii (Vondrová, 2015, s. 255)

Vondrová uvádí, že při tvorbě představ o prostoru a jeho strukturaci je nezbytné v první řadě pochopit podstatu konzervace míry na velkém množství izolovaných modelů, tedy experimentovat s útvary, překrývat je, odřezávat z nich části a ty seskupovat a přeskupovat do nových tvarů. Žák by si měl uvědomit, že pokud rozstřihne například čtverec na dvě různé části, tak součet obsahů obou vzniklých částí je roven obsahu čtverce původního. Podstatnou složkou této fáze je též práce s komplementem útvaru, vznikajícího ze zkoumaného útvaru doplněním na nějaký jiný, známější útvar, např. lichoběžník na rovnoběžník (obdélník, kosodélník), trojúhelník na rovnoběžník apod. Komplement hraje velkou roli při hledání vztahů pro obsahy.

Další důležitou dovedností žáka je výběr jednotky a práce s ní. Pro popsání dvojrozměrného prostoru a pro měření obsahů útvarů v něm je nutné pochopení procesu opakování (iterace) jednotky, v případě dvojrozměrného prostoru dvěma směry, čímž se vytváří obdélníková mřížka (Vondrová, 2015). Následuje odečítání obsahů z mříže, ptáme se tedy, kolik jednotkových útvarů nebo jejich částí se nám vejde do měřeného útvaru (např. kolik čtverců o obsahu 1 cm^2 naskládáme do obdélníku 2 cm × 3 cm). Jednotka se postupně zmenšuje a zobecňuje se do multiplikativního vztahu, dochází k abstrakčnímu zdvihu a vytváří se generický model. Vondrová navíc doporučuje v prvních dvou fázích popsaných ve schématu na obrázku 2.2 využívat čtverečkovaného papíru pro získávání nových zkušeností.

Další nezbytnou součástí pojmotvorného procesu jsou numerické výpočty obsahu, které souvisí zejména s multiplikativním vztahem mezi dvěma stranami, stranou a výškou, nebo mezi dvěma úhlopříčkami a mezi dalšími různými parametry (Vondrová, 2015). Multiplikativní vztah je postupně zobecňován rozdělováním na menší části na výpočty obsahů s parametry, jejichž délky jsou vyjádřeny reálnými čísly, což žákům může činit obtíže a vyžaduje to již vyšší míru uchopení dané problematiky.

V poslední hladině uvedené na obrázku 2.2 je žák schopen popsat daný proces nalézání obsahu slovně, po druhém abstrakčním zdvihu se přidává zápis pomocí jazyka algebry. Je nutné, aby při tom viděl souvislost mezi algebraickou a vizuální reprezentací. V případě, že vzorec nebo vztah není podložen dostatečným množstvím izolovaných modelů, jedná se o pouhé formální poznání. Žák si snadno vztah zapamatuje, ale formálně neví, co počítá. V případě narůstání většího množství vzorců se pak žákům snadno pletou.

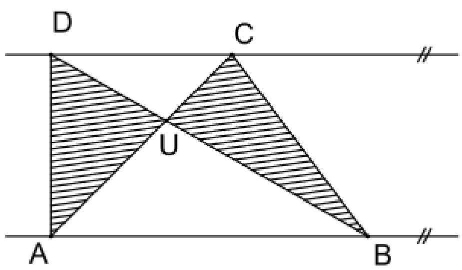
Pokud bych měl shrnout celý tento proces, je tedy nutné začít motivací a pokračovat například jednoduchým počítáním obsahů útvarů ve čtvercové síti, úlohami na vyplňování prostoru, pokrýváním obrazce jinými obrazci a obecně manipulativní činností. Navíc Vondrová ve své kapitole (2015) zmiňuje, že každá z popsaných hladin v obrázku 2.2 by měla začínat motivací formou vhodně zvolených úloh, u kterých by měl žák cítit smysluplnou potřebu porovnávat útvary, volit vhodnou jednotku či její iterace apod. Závěrem je důležité zopakovat, že celý proces (od motivace po abstrakci) může být poměrně rychlý, ale také může trvat velmi dlouhou dobu a není vhodné některou z hladin přeskočit nebo uspěchat.

2.3.3 Žákovské obtíže v oblasti plošné míry

S odkazem na kapitolu N. Vondrové (2015) čerpající z mezinárodních i českých výzkumů a s ohledem na mé osobní zkušenosti z výuky nyní představím nejčastější obtíže, se kterými se žáci v oblasti geometrie nejen na základní škole potýkají. Další obtíže jsou představeny v oddílech 4.3 a 4.7, které se věnují konkrétním problémům, které nastaly v rámci experimentální výuky a jsou zařazeny do kontextu zejména s testováním TIMSS.

První obtíže souvisí právě s konzervací (zachováním) míry. Žáci v širokém věkovém rozpětí mají problém s uvědoměním, že například pokud vezmeme devět čtvercových dlaždic a postavíme z nich čtverec, který následně přeskupíme na jiný útvar, tak obsahy obou útvarů zůstanou shodné. Téma shodností je dalším důležitým faktorem ovlivňujícím výsledky v oblasti míry. Žáci se často domnívají, že shodnost obsahů dvou útvarů automaticky znamená i shodnost tvarů. Je pro ně obtížné přijmout fakt, že dva různé rovnoběžníky, které mají stejné délky stran a k nim příslušných výšek, mají stejné obsahy. V případě, že již žáci tuto vlastnost pochopí, nastává problém s přijetím podobné vlastnosti zejména u trojúhelníku, což je mimochodem i jeden z důvodů vzniku této práce. Na některé nedostatky českých žáků poukazuje F. Kuřina (2011) v rámci komentáře úlohy o lichoběžníku (viz obrázek 2.3). Úlohu zvládlo vyřešit správně pouze 14 ze 140 žáků střední školy. N. Vondrová dodává, že žáci mají obvykle malé zkušenosti s úlohami, kde se nevyskytují konkrétní čísla.

U je průsečík úhlopříček lichoběžníku ABCD se základnou AB (obr. 38). *Mají trojúhelníky ADU a BCU stejný obsah? Odpověď zdůvodněte.*



Obrázek 2.3: Úloha o lichoběžníku (Kuřina, 2011, s. 168)

Dalším problémem pro velké množství žáků je volba správné jednotky a porozumění jednotce samotné. Žáci nepohlíží na plošnou jednotku jako na útvar, pomocí něhož jsme schopni pokrýt část roviny bez překrývání a vynechání mezer. Větší problém činí zobecnění obsahu i na necelé jednotky, kde se již jednotka musí dělit na části. Pokud žáci umí pracovat s jednotkou, jedná se zpravidla o jednotku čtvereční. Sám Rámcově vzdělávací program pro základní vzdělávání[3], dále jen RVP ZV, tuto problematiku nezdůrazňuje. Jediná zmínka o jednotce obsahu je v rámci výstupů z prvního stupně, kde navíc není plošná jednotka blíže specifikována a charakteristika je velice vágní. Žák by měl být podle RVP ZV schopen po absolvování druhého období na prvním stupni „počítat se základními jednotkami obsahu“. Žákům činí velké obtíže převody jednotek, které souvisí současně i s nepochopením řádů u desetinných čísel.

Dalším výrazným problémem je nedostatečné propojení mezi strukturací prostoru a výpočetními technikami. Žáci často nemají podložené vzorce pro obsah konkrétní zkušeností; vzorce nejsou získány zobecněním na základě společných vlastností útvarů, jedná se o pouhé formální poznatky. Vzorce jsou pak snadno zaměňovány a žáci je snadno zapomínají. Někteří žáci nemají vybudován multiplikativní vztah pro obsahy a veškeré znalosti o obsazích se u nich redukují na znalost procedur a vzorců. Další ukázkou formálního poznání je častá záměna obvodu za obsah a naopak. Nemalý počet žáků chápe obsah jako výsledek vynásobení dvou délek stran, a to bez ohledu na to, o jaký útvar se jedná. Pro mou práci je významné zjištění, že žáci nechápou vzájemný vztah mezi vzorcem pro obdélník a vzorci pro obsah trojúhelníku a rovnoběžníku. Proto je v experimentální výuce kladen velký důraz právě na tento vzájemný vztah.

[3] Dostupné z http://www.nuv.cz/file/214/, citováno dne 1. 6. 2016.

3 Analýza učebnic

Jak jsem již nastínil v rámci úvodu, učebnice matematiky slouží jako jeden z hlavních zdrojů učitelů pro přípravy hodin matematiky. Ovlivňují tedy zcela zásadním způsobem učební proces, ale zejména pojmotvorný proces představený podrobně v oddíle 2.3.2. Proto považuji za důležité analyzovat, jak je v učebnicích představována právě tematika obsahu. Předmětem zkoumání byly dvě používané řady učebnic matematiky pro první stupeň od třetího do pátého ročníku, podle kterých byly vzdělávány třídy, které se zúčastnily experimentu. Ve třídě 7. B se jednalo o učebnice od nakladatelství ALTER. V případě 7. C se jednalo o řadu učebnic nakladatelství FRAUS (od M. Hejného a kol.). Nejdůležitějším kritériem hodnocení pro mě bylo, v jaké rozsahu se učebnice věnují geometrii, do jaké míry odráží principy podnětné výuky a jak moc přistupují k tématu konstruktivisticky.

Tvorba učebnic je samozřejmě ovlivněna i kurikulárními dokumenty, a to konkrétně Rámcově vzdělávacím programem pro základní vzdělávání a současně s tím i školním vzdělávacím programem[4], dále jen ŠVP. Pokusím se shrnout, která všechna témata by se žáci bez rozdílu využívaných učebnic měli naučit z tematiky obsahů. Závěrem představím učebnici vydanou nakladatelstvím Prometheus určenou pro 7. ročník (Kadleček, Odvárko, 2014), podle které by měly být obě třídy zapojené v experimentu vzdělávány a od které jsem už při přípravě experimentu upustil.

3.1 Výuka obsahů dle RVP a ŠVP

Nejprve se zaměříme na RVP ZV, kde je klíčovou oblastí Matematika a její aplikace. Tato oblast je v rámci prvního stupně rozdělena na dvě období. Prvním obdobím jsou myšleny první tři ročníky na základní škole a druhým obdobím 4. a 5. ročník. Výstupy týkající se geometrie se nachází v oblasti „Geometrie v rovině a v prostoru“. V rámci prvního období v této oblasti by žáci měli rozeznávat, pojmenovat, modelovat a popsat základní rovinné útvary a jednoduchá tělesa. Současně s tím by měli zvládnout porovnávat velikosti útvarů, měřit a odhadovat délku úsečky. Nakonec by měli být schopni rozeznat a vymodelovat jednoduché souměrné útvary v rovině. Jak je patrné, v rámci prvního obdob tedy pojem obsahu není vůbec zmíněn. Z hlediska tématiky míry je ovšem zmíněn pojem délky. Podle použitého ŠVP by se žáci v prvním pololetí druhého ročníku měli věnovat rovinným obrazcům a tělesům, stejně tak i v rámci třetího ročníku, kde by se navíc měly objevit i pojmy jako bod, přímka, úsečka, polopřímka, rovina. Žáci by měli umět nalézt střed

[4] Školní vzdělávací program školy, na které proběhla experimentální výuka, je citován ze dne 1. 6. 2016.

úsečky. Jak je vidět, ani školní vzdělávací program nezmiňuje v žádné souvislosti tématiku plošné míry.

V rámci druhého období by se měl žák naučit rýsování a znázorňování základních rovinných obrazců a měl by zvládat jednoduché geometrické konstrukce. Dále by měl být schopen sestrojit kolmice a rovnoběžky, měl by být schopen graficky sečíst a odečíst úsečky. Měl by být schopen vypočítat obvody a obsahy útvarů ve čtvercové síti. Žák by měl používat základní jednotky obsahu. Závěrem by měl být schopen žák naznačit osově souměrné útvary ve čtvercové síti a měl by být schopen určit osu souměrnosti pomocí překládání papíru. Obsah školního vzdělávacího programu se ve většině částí shoduje s RVP ZV. S výpočtem obsahu čtverce a obdélníku by se měli žáci seznámit ve 4. ročníku v průběhu měsíců dubna a května. Bohužel se nikde v ŠVP nepíše o čtvercové síti. Dále se žáci vrací k tématice obsahů, konkrétně k převodům jednotek obsahu v průběhu 5. ročníku v měsíci únoru a květnu. Výpočty obsahů složitějších obrazců jsou plánovány v průběhu měsíce května. Na celý rok je naplánováno řešení zajímavých geometrických úloh. Učivo, které je dle mě v ŠVP na prvním stupni zcela navíc, je povrch krychle a kvádru.

3.2 Učebnice řady ALTER pro 1. stupeň základní školy

Řada učebnic nakladatelství ALTER autorek R. Blažková, M. Vaňurová, K. Matoušková a H. Staudková se skládá vždy ze tří učebnic pro každý ročník a přibližně pouze jedna pětina obsahu je věnována geometrii. Tématika obsahů je pojatá velice stručně a pojmy jsou většinou zaváděny formou instrukcí v rámečku nebo uvedením řešených příkladů. Kapitoly na sebe výrazně nenavazují a jednotlivá témata jsou propojena pouze vedením rámečku „Připomeň si," kde je rovněž zapsaný postup, jak úlohy řešit. Na konci každé učebnice se nachází kapitola „Tři oříšky", kde jsou úlohy pro rychlejší žáky. Obecně je v těchto učebnicích velké množství textu.

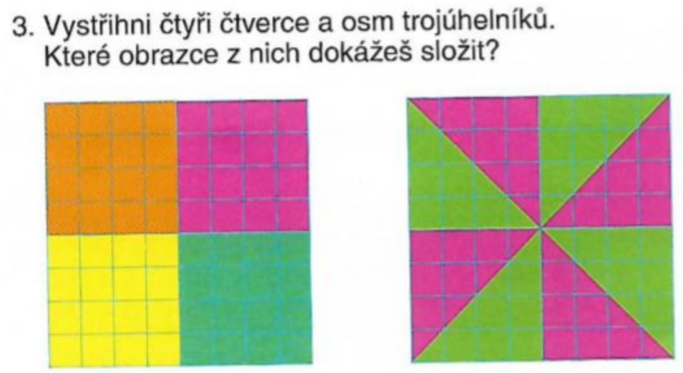
Nyní zkusím vybrat zejména ty úlohy nebo konkrétní části učebnic, které jsou dle mě důležité pro budování představy obsahu a které eventuálně považuji za podnětné. Zároveň se pokusím poukázat na nevýhody této učebnice, kterých je z mého pohledu hned několik.

3.2.1 Matematika pro 3. ročník ZŠ, 1. díl (Blažková a kol., 2010)

Části v této učebnici věnované geometrii se zabývají především základními geometrickými útvarům bod, přímka, polopřímka a rovina a jejich vzájemné poloze. O pojmu obsah zde není zmínka. Jediná úloha, která je dle mě podnětná a rozvíjí prostorovou představivost, se nachází ihned na předních deskách. Žáci tam mají za úkol postavit vyobrazené krychlové stavby a poté určit, z kolika krychlí se daná stavba skládá. Pro snazší budování představy o objemu jsou takové úlohy nezbytné.

3.2.2 Matematika pro 3. ročník ZŠ, 2. díl (Blažková a kol., 2012)

I v této učebnici není žádná zmínka o obsahu, témata geometrie jsou zaměřena především na práci s útvary a na bližší seznámení s čtyřúhelníky a trojúhelníky. Za jednu z podnětných úloh považuji úlohu, kde mají žáci vystřihnout z obrázku čtyři čtverce a osm trojúhelníků. Otázkou v úloze je, které obrazce je z nich možné složit (obrázek 3.1).



Obrázek 3.1: Úloha (Blažková a kol., 2012, s. 31)

Další podnětnou úlohou umístěnou na zadní obálce učebnice je úloha zaměřená na stavby z krychlí. Žáci mají za úkol sestavit krychlovou stavbu a zakreslit do čtvercové sítě pohled zepředu, pohled shora, pohled z boku a zároveň určit počet krychlí potřebných k sestavení stavby. Je škoda, že takováto důležitá úloha se nachází právě na zadní obálce. Je možné, že někteří učitelé tuto úlohu nevnímají jako součást učebnice a mají tendenci ji vynechat.

3.2.3 Matematika pro 3. ročník ZŠ, 3. díl (Blažková a kol., 2014d)

Ve třetím díle pro třetí ročník se učebnice věnuje tematicky přenášení a porovnávání úseček. Dalšími tématy jsou například hledání středu úsečky, kruh a kružnice. Z hlediska míry a obsahů jsou důležité zejména kapitoly, kde se žáci seznamují s čtyřúhelníky, trojúhelníky a učí se jejich konstrukci. Objevuje se tu také základní seznámení s krychlí a kvádrem, co je to vrchol, stěna a hrana. Témata čtyřúhelníku a trojúhelníku i těles jsou velice návodná. Úlohy nejsou zasazeny do žádného kontextu. V rámci většiny úloh mají žáci odpovídat pouze na otázky typu ano – ne. Chybí jakákoliv motivační úloha. Samotný pojem obsah nebo jednotka obsahu stále není přítomen.

3.2.4 Matematika pro 4. ročník ZŠ, 1. díl (Blažková a kol., 2014a)

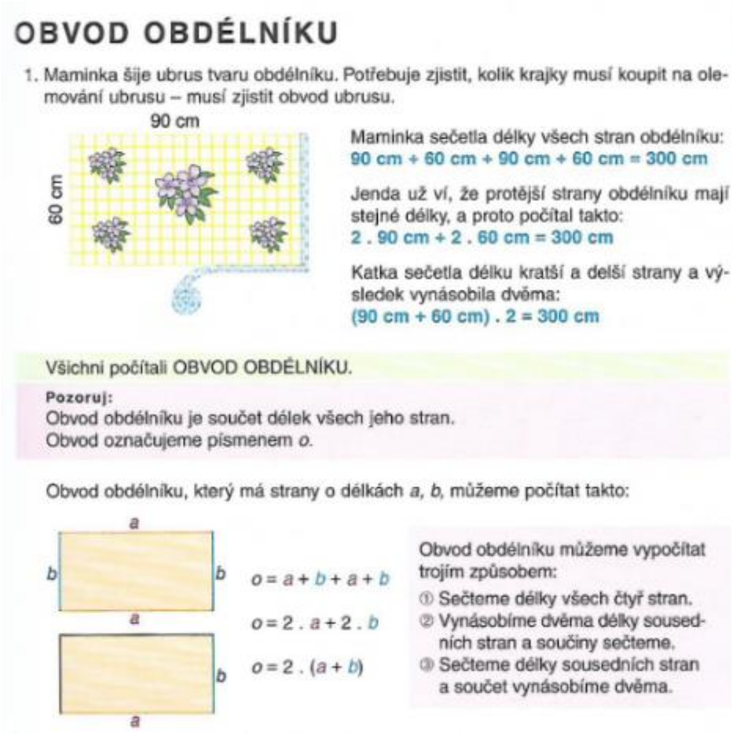
První díl učebnice čtvrtého ročníku se věnuje zejména vzájemné poloze přímek v rovině a následnému rýsování kolmic a rovnoběžek. Žáci se seznamují s pravým úhlem a také s pravoúhlým trojúhelníkem.

Informace o pravém úhlu a pravoúhlém trojúhelníků se žáci dozvídají pomocí rámečků a pokyny začínající slovy pozoruj a všimni si. Tyto aktivity poukazují na instruktivní styl učení založený hlavně na repetici, návodech a předávání již hotových poznatků. Jak jsem uvedl v oddíle 2.1, tyto poznatky nebývají hluboké a žák se je neučí v souvislostech, ale spíše nazpaměť jako z encyklopedie. Opět chybí motivační úloha, eventuálně úloha s vyšší kognitivní náročností, série úloh, úloha na zobecňování nebo aplikační úloha.

3.2.5 Matematika pro 4. ročník ZŠ, 2. díl (Blažková a kol., 2014b)

Ve druhém díle se žáci seznamují s vlastnostmi obdélníku a čtverce, tedy zejména s terminologií s tím spojenou. Dále je učebnice věnována rýsování trojúhelníku a trojúhelníkové nerovnosti a hledání obvodu trojúhelníku. Obvod je vysvětlen na oplocení trojúhelníkového pozemku. Ihned vzápětí je dodán algebraický vzorec *o* = *a* + *b* + *c* a vysvětlený vzorový příklad, jak se má obvod počítat. Procvičování probíhá na vlastním narýsovaném trojúhelníku. Žák má změřit délky a zapsat obvod. Poznatek je zde předán formou sdělení a pomocí pro žáka zatím neznámé symboliky.

Podobným způsobem je zaveden i obvod obdélníku (dále i obvod čtverce) na úloze s ubrusem (viz obrázek 3.2), kde je ihned vysvětleno, jak se obvod počítá. Navíc si myslím, že úloha sama o sobě není vhodná, protože na běžném ubrusu se krajka v rozích může překrývat. Pokud už bych měl použít tento způsob zavádění, využil bych raději úlohy s provázkem nebo plotem, které daleko lépe symbolizují úsečku.



OBVOD OBDÉLNÍKU

1. Maminka šije ubrus tvaru obdélníku. Potřebuje zjistit, kolik krajky musí koupit na olemování ubrusu – musí zjistit obvod ubrusu.

Maminka sečetla délky všech stran obdélníku:
90 cm + 60 cm + 90 cm + 60 cm = 300 cm

Jenda už ví, že protější strany obdélníku mají stejné délky, a proto počítal takto:
2 . 90 cm + 2 . 60 cm = 300 cm

Katka sečetla délku kratší a delší strany a výsledek vynásobila dvěma:
(90 cm + 60 cm) . 2 = 300 cm

Všichni počítali OBVOD OBDÉLNÍKU.

Pozoruj:
Obvod obdélníku je součet délek všech jeho stran.
Obvod označujeme písmenem *o*.

Obvod obdélníku, který má strany o délkách *a*, *b*, můžeme počítat takto:

$o = a + b + a + b$

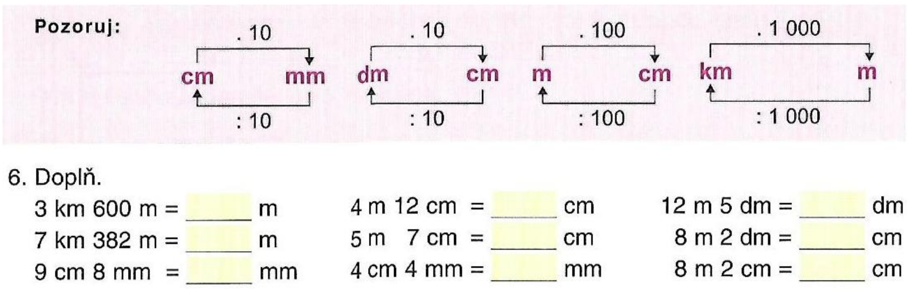
$o = 2 . a + 2 . b$

$o = 2 . (a + b)$

Obvod obdélníku můžeme vypočítat trojím způsobem:
① Sečteme délky všech čtyř stran.
② Vynásobíme dvěma délky sousedních stran a součiny sečteme.
③ Sečteme délky sousedních stran a součet vynásobíme dvěma.

Obrázek 3.2: Zavedení obvodu obdélníku (Blažková a kol., 2014b, s. 51)

Opět je zde vidět velké množství instrukcí a malé množství prostoru pro objevování. Navíc tak důležitý koncept z hlediska míry je předložen pouze na jednom nejednoznačném příkladu. Obvod čtverce už je rovnou vysvětlen pouze numericky na příkladu. Dále se v učebnici objevují úlohy na převody jednotek jako na obrázku 3.3.

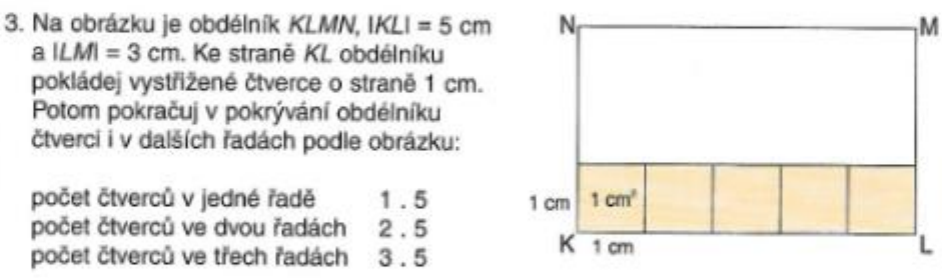


Obrázek 3.3: Tabulka na převody jednotek (Blažková a kol., 2014b, s. 44)

3.2.6 Matematika pro 4. ročník ZŠ, 3. díl (Blažková a kol., 2014c)

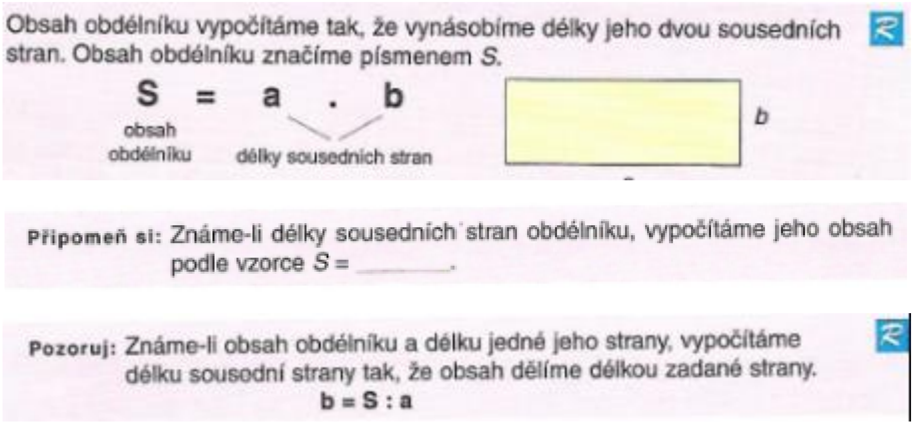
Z hlediska pojmotvorného procesu a zároveň tématu práce je tento třetí díl pro čtvrtý ročník jedním z nejdůležitějších. Nejenže se tam žáci setkávají s konceptem rovnoběžníku, ale zejména s tématikou obsahů, a to konkrétně s obsahem obdélníku a čtverce a zároveň s povrchem krychle a kvádru. Prostor je zde věnovaný i jednotkám obsahu a jejich převodům. Překvapivým zjištěním je fakt, že podle učebnice se obsah obdélníku a čtverce řadí mezi úlohy, které jsou určeny pro děti s hlubším zájmem o matematiku. V učebnici to poznáme dle označení písmenem R v modrém rámečku u daného tématu nebo úlohy. Toto zařazení s největší pravděpodobností odkazuje na RVP, kde hlavní dovedností na prvním stupni je počítání obsahů útvarů ve čtvercové síti. V prostředku učebnice je k nalezení kartonová pomůcka na odvození obsahu obdélníku s čtverečními centimetry a decimetrem k vystřižení.

Obsah obdélníku je zaveden jako počet čtverců, které můžeme naskládat do obdélníku. Žáci jsou pomocí instrukcí dovedeni až k hotovému poznatku. Jak je vidět na obrázku 3.4, multiplikativní vztah pro obsah je vložen spíše uměle.



Obrázek 3.4: Odvozování obsahu čtverce (Blažková a kol., 2014c, s. 22)

Žáci jsou směrováni pomocí rad, pouček, šablon a vyřešených příkladů až k hotovému algebraickému vztahu. Veškeré příklady se zaměřují na zapamatování vzorce a vztahu s násobením. Úlohy ale nejsou již více propojovány s geometrickou reprezentací.



Obrázek 3.5: Vztahy pro obsah obdélníku (Blažková a kol., 2014c, s.22–23)

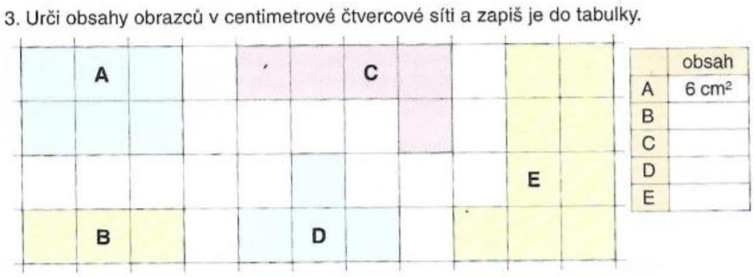
Dále jsou identickým způsobem odvozeny vztahy pro čtverec a poté dokonce i pro krychli a kvádr. Například u povrchu je uvedena pouze jedna ukázka jedné sítě krychle a ihned pod tím uveden vzoreček. Samotný nadpis u kapitol zní „Výpočet povrchu krychle“. Jak je tedy vidět, učebnice se opět nezaměřuje na praktické využití. Procvičovací úlohy většinou spočívají ve výpočtu obsahu na základě vzoru. V učebnici je tématu obsahů věnováno přibližně 7 stran.

3.2.7 Matematika pro 5. ročník ZŠ, 1. díl (Justová, 2010a)

Ani změna autorky nepřináší příliš velký rozdíl v prezentaci učiva a v rozmanitosti úloh. V tomto prvním dílu je tématika obsahů naprosto vynechána, není začleněna ani v kapitole Oříšky. Nenalezneme ji ani u témat jako čtverec a obdélník, kde se zopakování výpočtu nebo alespoň ukázka praktického využití přímo nabízí. V geometrii v oblasti míry se autorka vrací pouze k obvodům útvarů formou zopakování vzorců pro výpočet obvodu čtverce, obdélníku a trojúhelníku. Mezi příklady k procvičení nalezneme i úlohu o krajce zmiňovanou při zavádění obsahu obdélníku v oddíle 3.2.5.

3.2.8 Matematika pro 5. ročník ZŠ, 2. díl (Justová, 2010b)

K tématice obsahů se autorka vrací v druhém díle, kde v rámci opakování jednotek obsahu pracuje s čtverečními jednotkami a dokonce se objevuje alespoň jedna úloha na práci se čtvercovou sítí. V rámci této krátké rekapitulace na straně 8 jsou žákům představeny i jiné jednotky než centimetry čtvereční, bohužel nejsou využity při žádné další práci. Opakování jednotek obsahů je redukováno pouze na tři úlohy, z nichž jedna je na obrázku 3.6. Jedná se o jednu z mála úloh v celé řadě učebnic, kde se žáci setkají s počítáním obsahů ve čtvercové síti, i přesto, že je toto téma považováno za jeden z hlavních výstupů žáků stanovený v RVP ZV v druhém období na prvním stupni.



Obrázek 3.6: Úloha na počítání obsahů ve čtvercové síti

Dále se témata obsahů vrací v podobě opakování vzorců pro obsah čtverce a obdélníku na straně 13, kde kromě klasických úloh o dosazování, dalších pouček a předepsaných šablon na výpočty úloh nalezneme alespoň jednu praktickou úlohu se zadáním: „Pan Nový má zahradu tvaru obdélníku s rozměry 20 m a 16 m, zahrada pana Starého je tvaru čtverce o straně 18 m. Porovnej obsahy i obvody obou zahrad.“ Je to jedna z mála úloh, kde není explicitně řečeno, že mají žáci hledat obsah. V závěru jsou zmíněny okrajově jednotky ar a hektar.

3.2.9 Matematika pro 5. ročník ZŠ, 3. díl (Justová, 2010c)

V posledním díle celé řady učebnic je opět téma obsahů pojato velmi okrajově. Na straně 27 je pouze půlstránka věnována výhradně převodům jednotek a dvěma úlohám na výpočet obsahů čtverce a obdélníků na základě zadaných údajů. Formou jednoho příkladu a dvou úloh je také zařazeno téma obsahů složitějších obrazců (viz strana 28). Na straně 44 se autorka vrací k vysvětlování vzorců pro povrch krychle a kvádru. Dole na stejné straně nalezneme osamocenou úlohu na výpočet obsahu složeného útvaru, která je i přes svoji důležitost v celé řadě jako jedna z mála. Některé další můžeme naleznout v závěrečných opakováních např. ve stejné učebnici na straně 59. V závěru na straně 47 se věnuje autorka učebnice krychlovým stavbám a propedeutice objemu.

3.2.10 Shrnutí a závěr

Řadu učebnic od nakladatelství ALTER považuji za instruktivní, šablonovitou, návodnou a až příliš formalistickou a vzhledově spíše neatraktivní. V oblasti hledání obsahů útvarů dle mě neposkytuje velký prostor pro kreativitu žáků. Pro učitele je možná její používání jednoduché vzhledem k uzavřenosti úloh a s tím související snadnou kontrolou žákovských řešení. Při podrobné analýze úloh a složení témat je viditelné, že učebnice vede žáky spíše k učení informací než k dovednostem. Matematika zde podaná je oddělena od lidských aktivit a od historického vývoje matematiky. Je zde vytvářen zcela jiný svět, který preferuje předem stanovenou formu, ať už se jedná o postupy, zápisy nebo výpočetní procedury a také procedurální způsob myšlení.

Obrázek 3.7: Schéma fungování řady učebnic ALTER pro 1. stupeň základní školy

Témata v učebnici jsou od sebe oddělena, neprolínají se, a získané poznatky tak nejsou využívány v dalších kontextech, nevedou žáky k vytváření spojů a poznatky jsou diskrétního charakteru. Nová témata začínají výkladem nebo ukázkou na vyřešeném příkladu, dále žáci dostávají návod nebo postup, jak při řešení daného problému postupovat, a procvičují na příkladech (velice často je postup předvyplněný a žáci pouze doplňují mezivýpočty). V závěru se žáci skokem přenesou na nové téma, kde se postup opakuje. Celý proces je lineární a přirovnal bych ho k „průjezdu muzeem na pohyblivém pásu," tedy o procházení matematikou stále stejným tempem bez kontaktu s tím podstatným (viz schéma na obrázku 3.7).

Většina úloh nevyžaduje více než jednokroková řešení a obecně se úlohy v této řadě učebnic dají klasifikovat jako ty jednodušší. Žákům je před zobecněním dáno jen velice malé množství izolovaných modelů pro uchopení nového poznatku a pro případný abstrakční zdvih. Navíc úlohám, které by měly rozvíjet klíčové dovednosti z RVP ZV, je věnováno jen velice málo prostoru. Za největší problém považuji zejména malou práci se čtvercovou sítí a také předčasnou algebraizaci vztahů pro obsahy, kterou Vondrová (2015) označuje za jeden možný zdroj problémů českých žáků právě v oblasti míry.

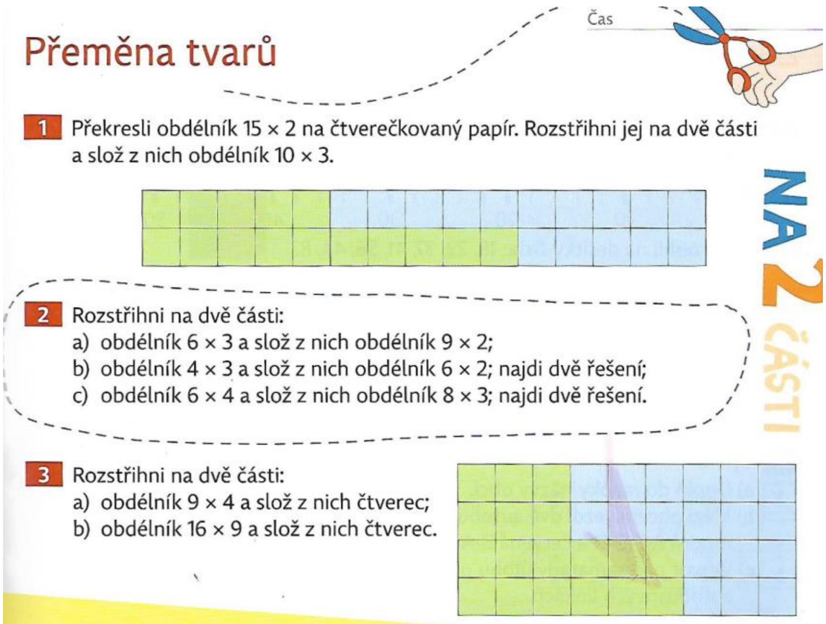
3.3 Učebnice řady FRAUS určené k výuce dle Hejného metody

Pro každý ročník prvního stupně existuje jedna učebnice na školní rok, která může být doplněna speciálními pomůckami jako např. geodeskou. Učebnice nakladatelství FRAUS pro první stupeň se na první pohled liší od klasických učebnic matematiky, jsou více barevné a je v nich velké množství ilustrací. Naopak tam není mnoho pouček a instrukcí. Už podle obsahu jednotlivých učebnic je vidět, že většina úloh je zasazena do různorodých kontextů nazývaných prostředí.

Nyní se pokusím představit témata zpracována v rámci učebnic pro 3., 4. a 5. ročník a ukázat některé rozdíly a výhody oproti standardním učebnicím matematiky.

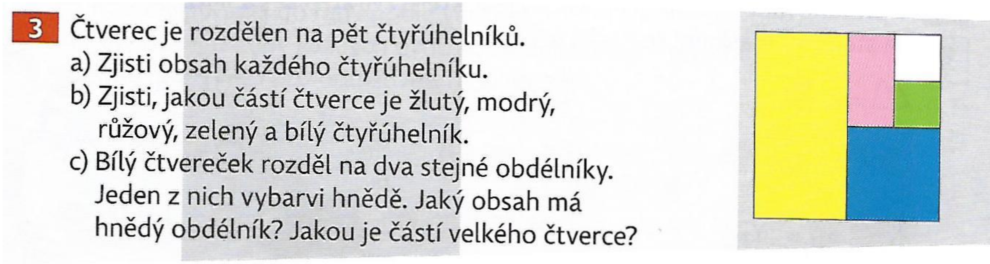
3.3.1 Matematika, učebnice pro 3. ročník základní školy (Hejný a kol., 2009)

V oblasti geometrie se už v rámci třetího ročníku žáci setkávají s krychlovými stavbami a rozvojem prostorové představivosti. Pracují s tělesy v různých prostředích, kreslí plány staveb nebo naopak staví stavbu podle zadaného plánu, obarvují hrany a stěny krychle. Učebnice se zaměřuje na rozeznávání základních mnohoúhelníků, ale také těles, jako krychle, jehlan kvádr apod. Již ve třetí třídě je zavedena propedeutika k soustavě souřadnic a žáci se učí rýsovat základní geometrické útvary. V učebnici se střídají otevřené i uzavřené úlohy. K řešeních některých úloh je zapotřebí pomůcek – krychle, geodeska, měřící nástroje, dřívka. Rozvíjeny jsou už i pojmy obvod a obsah, ale i povrch. Velký důraz je kladen na práci s čtvercovou sítí. Učebnice cíleně podporuje metodu pokrývání útvarů jinými tvary než čtverci (např. strana 12) viz prostředí „parkety“. V učebnici jsou zařazeny i úlohy na zobecňování, které umožňují individualizovat výuku a které u žáka rozvíjí kromě geometrické představivost zároveň i funkční myšlení (např. strana 23) viz prostředí „dřívkové stavby. V učebnici nalezneme také úlohu jako například na straně 22., kde žáci zjišťují délky tyčí, které jsou různě nabarveny. Další možnost individualizace výuky umožňují gradované úlohy (úlohy se stupňující se náročností) jako například úloha na straně 39, kde je jako další prvek zařazena manipulace, která zároveň slouží jako zdroj motivace. Úlohy na přeměny útvarů fungují jako důležitá propedeutika pro uvědomění si konzervace míry.



Obrázek 3.8: Přeměna tvarů (Hejný a kol., 2009, s. 39)

Obsahy útvarů jsou zařazovány v učebnici po celou dobu, navíc v některých úlohách je zakomponovaná i propedeutika na počítání s desetinnými čísly. Obsahy jsou hodně propojovány i s vyjádřením části z celku. Nikde v učebnici není k nalezení žádný algebraický vzorec ani návod popisující výpočet obsahů.



3 Čtverec je rozdělen na pět čtyřúhelníků.
a) Zjisti obsah každého čtyřúhelníku.
b) Zjisti, jakou částí čtverce je žlutý, modrý, růžový, zelený a bílý čtyřúhelník.
c) Bílý čtvereček rozděl na dva stejné obdélníky. Jeden z nich vybarvi hnědě. Jaký obsah má hnědý obdélník? Jakou je částí velkého čtverce?

Obrázek 3.9: Úloha obsahy (Hejný a kol., 2009, s. 75)

3.3.2 Matematika, učebnice pro 4. ročník základní školy (Hejný a kol., 2010)

Učebnice pro 4. ročník prohlubuje znalosti 3. ročníku z geometrie. Objevuje se například nové téma úhly. Z hlediska obsahů útvarů jsou zařazeny úlohy na rozvoj představy o obvodu, obsahu a objemu prostřednictvím čtvercové sítě. Opět se zesložiťují úlohy v rámci prostředí parkety, dřívka, geodeska. K hledání obsahů útvarů se zařazuje nová metoda rámování, která podporuje myšlenku komplementu útvaru. Učebnice se i formou úloh zaměřuje na vzájemnou polohu přímek. V učebnici jsou zařazeny úlohy na jak na měření obvodu, obsahu i objemu.

Četněji se zde pracuje se zlomkem ve spojitosti s obsahy útvarů. Zařazeny jsou i velice důležité úlohy na zdůvodňování právě v oblasti geometrie (viz strana 97). Objevuje se také práce s tangramem (strana 27, úloha 25), Möbiovým páskem, papírovými skládačkami (strany 69–72), nebo úlohy na doplňování parametrů v náčrtku, na základě vlastností útvarů (strana 29, úloha 7). V rámci úloh ve čtvercové sítě jsou zařazeny úlohy na hledání obsahů rozličných útvarů a dokonce i obsahy trojúhelníků viz obrázek 3.10.

14 Přerýsuj mřížové trojúhelníky do centimetrové mříže a zařaď je do tabulky. Poté najdi trojúhelníky, které v tabulce schází.

	Obsah trojúhelníku je					
	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	$2\frac{1}{2}$	3
rovnoramenný						
nerovnoramenný						

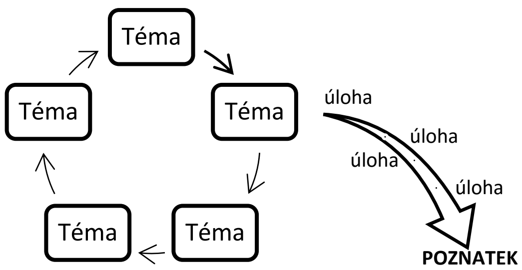
Obrázek 3.10: Obsahy mřížových trojúhelníků (Hejný a kol., 2010, s. 55)

3.3.3 Matematika, učebnice pro 5. ročník základní školy (Hejný a kol., 2011)

Učebnice pro pátý ročník opět čerpá z úloh z předchozích dílů a navazuje řešením podobných problému, ale s větší náročností. Z hlediska oblasti míry prohlubují průběžně koncepty jako obsah, obvod ale i objem. Dochází k dalšímu rozvoji v prostředí parkety, objevují se různé mřížové útvary, jejichž obsah pomocí čtvercové sítě žáci počítají. Obsahy jsou také určovány pomocí metody rámování rozvíjené již ve čtvrtém ročníku. K síti krychle a kvádru se přidává síť tetraedru a trojbokého hranolu. Žákům je téma obsahů předkládán v rámci tématu logika, kde jako úvodní aktivita byla rozhodnou bez měření, který ze dvou trojúhelníků má větší obsah.

3.3.4 Shrnutí a závěr

Učebnice nakladatelství Fraus jsou ryze konstruktivistické. Objevují se v nich pokyny, jako např. odhal, dokaž nebo vysvětli, které jsou právě pro konstruktivistickou výuku charakteristické, protože žáka vtahují do učebního procesu. Do učebnic je zařazeno velké množství manipulativních aktivit a úloh z různých matematických prostředí. Uvádění úloh v rámci různých kontextů umožnuje získat různý náhled na probíranou tématiku a poskytnout dostatečné množství izolovaných modelů nezbytných pro nalezení generického modelu. V rámci učebnice se jednotlivá prostředí, ale i témata opakují cyklicky a nejsou přílišně oddělená, což umožňuje prohlubování poznatků a jejich neustálé aktivizování. Různá témata jsou zařazována průběžně. Tento způsob poskytuje obrovskou výhodu žákům, kteří chybí ve výuce, mají větší šanci dohnat zameškané učivo. Úlohy se vzájemně prolínají, a umožňují tak jednotlivé tematické celky propojovat. V každém tématu jsou představovány vhodně volené úlohy (v obrázku 3.11 by měly vést šipky ze všech témat) vedoucí k budování poznatku, který si pak žák začleňuje do své myšlenkové struktury a využívá v rámci řešení úloh z dalších oblastí přesně tak, jak je popsáno v teorii generických modelů. Celý postup bych přirovnal ke kuchařovu *know-how*. Pro to, aby se stal kuchař úspěšný, musí nejprve zkoušet různé recepty, hledat nové kombinace chutí a ingrediencí a vylepšovat svoje receptury a techniky přípravy pokrmů. Tyto zkušenosti pak promítá do vaření dalších kulinářských skvostů.



Obrázek 3.11: Schéma fungování učebnic FRAUS

Autoři zařadili úlohy různé náročnosti, ale také série se stupňovanou obtížností, tzv. gradované úlohy. U většiny kapitol je i rozšiřující učivo. Tyto prostředky cílí na individualizaci výuky. V učebnici nenalezneme žádné algebraické vzorce pro výpočty obsahů, objevuje se tam jen pouze velmi malé množství instrukcí. Velice často jsou instrukce skryté v textech podaných formou rozhovoru mezi žáky nebo tvrzení žáka, o jehož pravdivosti má být rozhodnuto. Učebnice klade větší důraz na přípravy učitele na hodinu, protože výuka s touto učebnicí činí výuku otevřenější. Tedy obecně její používání může některým učitelům činit obtíže.

3.4 Učebnice Prometheus pro 7. ročník základní školy

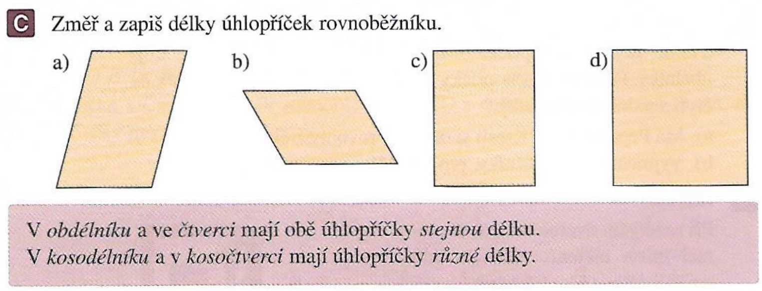
Vzhledem k tomu, že experimentální výuka se týká především obsahů trojúhelníku a rovnoběžníku, představím didaktické zpracování v rámci učebnice matematiky pro 7. ročník autorské dvojice O. Odvárko a J. Kadleček (2014), podle níž bych měl na dané základní škole tuto tématiku vyučovat.

3.4.1 Rovnoběžník a jeho obsah (Kadleček, Odvárko, 2014, s. 39–58)

Toto téma navazuje na kapitolu věnovanou středové souměrnosti. Nejprve se žák seznamuje s pojmy (protější strana, sousední strana, protější vrchol atd.), značením (stran, úhlů, vrcholů) a vlastnostmi čtyřúhelníků a rovnoběžníků (rovnoběžnost, součty úhlů). Vlastnosti jsou představeny pomocí poučky v rámečku, které vždy předchází úloha. Dalo by se říct, že tyto rámečky slouží jako shrnutí úlohy nebo to, co by si měl žák zapamatovat. Následují pojmy výška a úhlopříčka rovnoběžníku. Na úvodu oceňuji, že je zařazena praktická úloha na úvahu o stříhání tapety chlapci Pepou a Čendou (viz obrázek 3.12), která může sloužit eventuálně jako nápad pro manipulativní činnost (není ovšem explicitně řečeno).

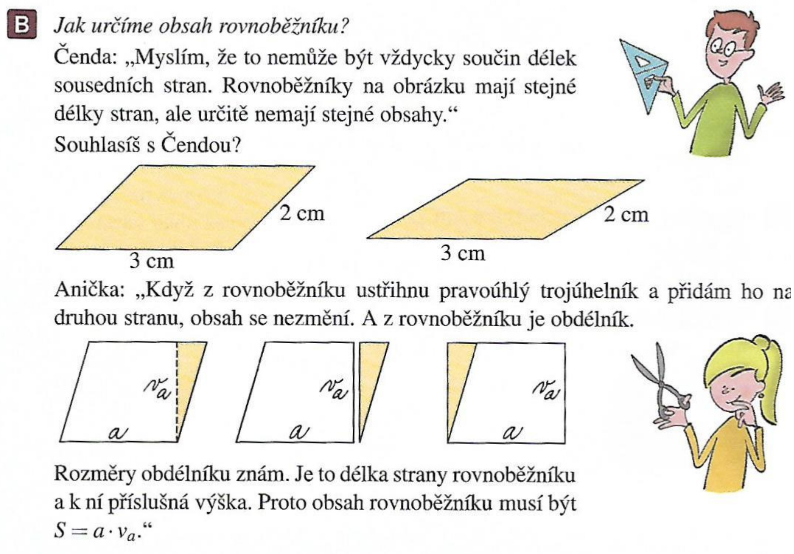
Obrázek 3.12: Praktická úloha (Kadleček, Odvárko, 2014, s. 45)

Dále žáci na klasických úlohách měří a zapisují délky výšek z obrázků. Autoři pokračují seznámením žáků s kosočtvercem a kosodélníkem. Za vhodnou úlohu pro uvědomění si vlastností těchto útvarů považuji cvičení 2 na straně 48, kde je úkolem načrtnout a pojmenovat útvary zadaných vlastností. Úloha je dobře využitelná pro skupinovou diskusi. Za nešťastné považuji pokládání otázek nebo zadávání úloh, na které se ihned řádek pod nimi objevuje odpověď, což se děje v celé této řadě učebnic (obrázek 3.13).



Obrázek 3.13: Nevhodné umístění výstupů z úlohy (Kadleček, Odvárko, 2014, s. 49)

Dále je kapitola zaměřena na konstrukce rovnoběžníku dle různých návodů. Nejdůležitější pro mou práci je kapitola 4.5 na stranách 54–58, kde je představen obvod a obsah rovnoběžníku. V obou případech se opět objevují zápisy vztahů pomocí algebraických vzorců. Na obrázku 3.14 je možné vidět vysvětlení vzorce pro obsah rovnoběžníku.


B *Jak určíme obsah rovnoběžníku?*

Čenda: „Myslím, že to nemůže být vždycky součin délek sousedních stran. Rovnoběžníky na obrázku mají stejné délky stran, ale určitě nemají stejné obsahy."

Souhlasíš s Čendou?

Anička: „Když z rovnoběžníku ustřihnu pravoúhlý trojúhelník a přidám ho na druhou stranu, obsah se nezmění. A z rovnoběžníku je obdélník.

Rozměry obdélníku znám. Je to délka strany rovnoběžníku a k ní příslušná výška. Proto obsah rovnoběžníku musí být $S = a \cdot v_a$."

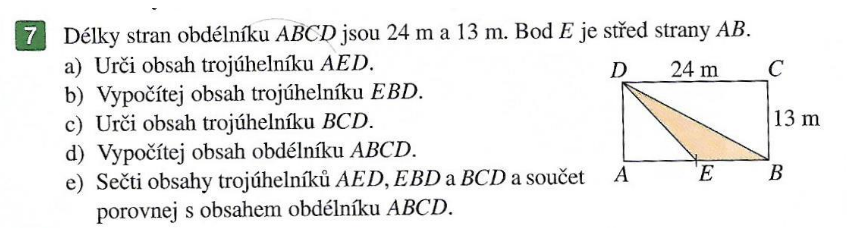
Obrázek 3.14: Odvození vzorce pro obsah rovnoběžníku (Kadleček, Odvárko, 2014, s. 55)

Získaný vztah je následně procvičován na úlohách, kde pro výpočet ve většina případů stačí vynásobit pouze dvě zadané hodnoty (tedy např. „Vypočítej obsah rovnoběžníku *ABCD*, pro který platí: a = 2 m, v_a = 4 m"). Nedá se tedy příliš mluvit o podnětnosti daného přístupu.

3.4.2 Obsah trojúhelníku

K tématu obsahu trojúhelníků v kapitole 5.1 začínající na straně 59 autoři přistupují podobně jako k rovnoběžníku. Na začátku je uveden postup Čendy, který navrhuje trojúhelník doplnit na rovnoběžník. Žáci jsou vyzváni ke kontrole. Dále je položena otázka „Objevíš vzorec?".

Pomocí čtyř návodných kroků by měl žák ke vztahu dojít. Dále je získaný vztah ukázán pro různé výšky trojúhelníku. Za nešťastné považuji dokazování vztahů pro obsahy útvarů na obecných útvarech bez konkrétních hodnot. U všech žáků se předpokládá, že jsou již schopni abstrakce. Následně je celý získaný vztah zapsaný podle algebraického vzorce a procvičován na podobných úlohách jako v případě rovnoběžníku. Přece jen jsem v učebnici našel úlohu, kterou považuji za méně tradiční (obrázek 3.15) s vynecháním zadání e), které se mi zdá až příliš instruktivní. V kapitole zcela chybí práce se čtvercovou sítí, automaticky se předpokládá, že žák vztahy vidí na základě jednoho příkladu. Obecně se zde nepracuje s individualizací.


7 Délky stran obdélníku $ABCD$ jsou 24 m a 13 m. Bod E je střed strany AB.

a) Urči obsah trojúhelníku AED.
b) Vypočítej obsah trojúhelníku EBD.
c) Urči obsah trojúhelníku BCD.
d) Vypočítej obsah obdélníku $ABCD$.
e) Sečti obsahy trojúhelníků AED, EBD a BCD a součet porovnej s obsahem obdélníku $ABCD$.

Obrázek 3.15: Úloha na obsahy trojúhelníků (Kadleček, Odvárko, 2014, s. 61)

3.4.3 Shrnutí a závěr

Téma rovnoběžníků a trojúhelníků je zaměřené více na terminologii a správné značení než na obsahy a práci s nimi. Samotné tématice se totiž věnuje v celé učebnici pouze 6 stran. Práce s učebnicí není pro učitele náročná a témata jsou podobně jako v učebnicích ALTER pro první stupeň oddělena. Vytknul bych rozhodně velké množství pouček a shrnujících rámečků. Jak bylo vysvětleno v oddíle 2.2, tyto poučky jsou hotové informace, které žák snadno zapomíná a které si nezařadí do své poznatkové struktury. Za pozitivní považuji, že alespoň v rámci úvodu je jedna úloha na zamyšlení a téma není představeno ihned formálně. Autoři se také snaží začlenit nějaké úlohy „ze života“. Nicméně si myslím, že lakoničnost, se kterou je podána tato látka, může být jednou z dalších příčin neúspěchů a problémů žáků v oblasti míry.

4 Experimentální výuka

4.1 Rámcový popis experimentu

Cílem práce bylo na základě odborné literatury a učebnic naplánovat podnětnou výuku obsahu rovinných útvarů (konkrétně trojúhelníku a rovnoběžníku), následně ji realizovat formou výukových experimentů ve dvou třídách 7. ročníku s odlišnou předchozí zkušeností s výukou matematiky na prvním stupni („klasická“ vs. „Hejného metoda“) a závěrem tuto výuku zhodnotit. Pro účely hodnocení byl průběh experimentu zaznamenáván na videokameru a následně analyzován. Další pořízená data sestávala z fotografií řešení žáků, mých terénních poznámek, záznamů obrazovky na interaktivní tabuli, ale také z pohospitačních rozborů hodin, na nichž byly přítomné dvě paní učitelky. V 7. C se jednalo o první hodinu dne 1. 6. 2016 a v případě 7. B hospitace probíhala dne 7. 6. 2016. Analýza dat byla zaměřena především na identifikaci řešitelských strategií v oblasti obsahu útvarů, na chyby, kterých se při řešení žáci dopouštěli, ale také na srovnání průběhu výuky a úrovně znalostí v obou třídách.

Realizační fázi experimentu předcházel rozhovor s prvostupňovými učitelkami daných tříd a analýza využívaných učebnic. V obou skupinách byl navíc zadán pre-test složený z pěti diagnostických úloh, které zjišťovaly vstupní znalosti žáků z oblasti obsahů rovinných obrazců a zároveň posloužily jako vhodný nástroj pro srovnání úrovně znalostí napříč ročníkem. Výsledky byly zohledněny při tvorbě podrobného plánu výuky.

Po skončení celé výuky byl žákům zadán post-test sestavený z úloh týkajících se vyučované látky. Výsledky pre-testu a post-testu včetně hodnocení průběhu experimentálního vyučování posloužily k aktualizaci experimentálního výukového plánu.

4.2 Charakteristiky tříd

Pro experimentální výuku jsem zvolil dvě třídy 7. ročníku ze základní školy na okraji Prahy, v nichž od třetího do pátého ročníku vedly hodiny matematiky třídní učitelky daných tříd. Na základě rozhovorů jsem zjišťoval, s jakými pojmy, učivem nebo konkrétními pomůckami se v souvislosti s výukou geometrie žáci setkávali. Rozhovor měl rovněž za cíl zjistit, jaká byla ve zkoumaných třídách úspěšnost při řešení úloh, obecný přístup k práci či nakolik byla třída schopna pracovat ve skupinách. V popisech jednotlivých tříd tedy vycházím zejména z pořízených rozhovorů s učitelkami a také z vlastních zkušeností z výuky v těchto dvou třídách. Obě třídy jsem vyučoval od 6. ročníku.

4.2.1 Třída 7. B – vedena klasickou metodou

Tato třída byla ve školním roce 2015/16 složena z 22 žáků, 11 chlapců a 11 dívek. Z původní třídy přešlo na druhý stupeň 20 žáků. Jedna žákyně přestoupila z jiné třídy v rámci ročníku a druhý žák přišel z jiné školy. Z hlediska prospěchu v matematice patřila 7. B na prvním stupni k lepšímu průměru. Na druhém stupni se výsledky zhoršily, což bylo částečně způsobeno odchodem deseti žáků na víceletá gymnázia. Tato změna měla velký vliv jak na celou třídu, tak na celkovou atmosféru ve třídě.

4.2.1.1 Období 1. stupně

Z rozhovoru s paní učitelkou vyplynulo, že se na prvním stupni z hlediska chování nevyskytovaly ve třídě žádné výraznější problémy. Vztahy mezi žáky byly většinou přátelské. Třída byla pracovitá, o probírané učivo měli žáci zájem a zadané úkoly se snažili plnit. Žáci měli geometrii pravidelně jednu hodinu týdně v určitý den, pokud to vyžadovalo probírané učivo v matematice nebo ostatních předmětech, byla geometrie zařazena i mimořádně. Geometrie tedy tvořila přibližně jednu pětinu všech hodin.

Dále paní učitelka uvedla, že s pojmem „obsah“ se žáci poprvé setkali ve 4. ročníku, v němž byl obsah obdélníku zaváděn formou manipulativní činnosti. Vztah byl vyvozován pomocí čtvercové sítě, postupným pokrýváním obrazce jednotkovými čtverci. Obsah byl uváděn nejprve v jednotkových čtvercích. Později byla zavedena jednotka obsahu 1 centimetr čtvereční. Žáci se též učili vzorec pro výpočet obsahu obdélníku. Stejným způsobem byl vyvozen obsah čtverce a jeho výpočet. Následovalo zavedení dalších jednotek obsahu (metr čtvereční, decimetr čtvereční, milimetr čtvereční) a některých vztahů mezi nimi. Následovalo určení obsahu složitějších obrazců, k jejichž řešení bylo třeba nejprve určit obsah obdélníku nebo čtverce. Byl zaveden výpočet povrchu krychle a kvádru jako součet obsahů všech stěn každého z těchto těles s využitím jejich sítí.

V 5. ročníku se pracovalo zejména s převáděním jednotek obsahu, které žáci poznali ve 4. ročníku. Zaváděly se nově jednotky obsahu ar, hektar, kilometr čtvereční. Zavedl se též vzorec pro výpočet povrchu kvádru. V hodinách geometrie se paní učitelka věnovala obsahu složitějších obrazců rozdělováním na vhodné obdélníky a čtverce.

Dále mě paní učitelka seznámila s úlohami souvisejícími s pojmem obsah, se kterými se žáci setkávali v průběhu vyučování na prvním stupni.

– Žáci pokrývali obdélník nebo čtverec čtverci o straně 1 cm a určovali počet čtverců o straně 1 cm v řádku, určovali počet řádků a počet čtverců potřebný k pokrytí celého útvaru.

- Žáci zjišťovali obsah geometrických útvarů pomocí čtvercové sítě na průhledné fólii. Fólii s vyznačenou sítí čtverců o straně 1 cm na geometrické útvary přikládali. Při řešení těchto úloh se setkali s obsahem trojúhelníku a rovnoběžníku.
- Žáci určovali obsah geometrických útvarů výpočtem.
- Žáci určovali délku strany obdélníku, když znali jeho obsah a délku sousední strany.
- Žáci zakreslovali do čtvercové sítě k vyznačeným stranám obdélníky nebo čtverce tak, aby měly daný obsah.
- Žáci řešili slovní úlohy, v nichž bylo třeba vypočítat obsah. (např. Kolik cm^2 hedvábí je třeba na šátek daných rozměrů? Jaký je obsah koberce daných rozměrů? Jaký je obsah pozemku, záhonu? Kolik čtvercových dlaždic o obsahu 1 dm^2 potřebujeme na vydláždění obdélníkové terasy? Kolik m^2 podlahové krytiny je potřeba v místnosti o daných rozměrech? Jaký je obsah Václavského náměstí, Strahovského stadionu…?)
- Žáci zjišťovali potřebné rozměry a počítali obsahy např. desky školní lavice, desky školní tabule, nástěnky, tabule okna, podlahy třídy.
- Žáci si čtverec o straně 1 dm rozdělili na čtyři shodné čtverce a vystřihli je. Podle obrázků sestavovali z těchto čtverců různé útvary. Uvědomovali si, že všechny tyto útvary mají stejný obsah – 1 dm^2.
- Žáci určovali obsahy obrazců zakreslených v centimetrové čtvercové síti.
- Žáci odhadovali, v jakých jednotkách bude vhodné počítat obsah např. desky lavice, podlahy, zahrady, pole…
- Žáci převáděli jednotky obsahu. Vztahy mezi jednotkami vyvozovali výpočtem.
- Žáci zjišťovali rozlohu států, podle rozlohy je seřadili a porovnávali.
- Žáci počítali povrch krychle a kvádru jako součet obsahů všech stěn každého z těchto těles. Využívali sítí těles. Žáci na vlastních modelech krychle a kvádru, různých krabičkách apod. zjišťovali jejich rozměry a počítali povrchy.
- Žáci počítali obsahy složitějších obrazců rozdělením obrazce na vhodné obdélníky a čtverce.

Paní učitelka využívala k řešení výše uvedených úloh týkajících se obsahu zejména čtverečkovaný papír, papírové modely obdélníků a čtverců, modely jednotek obsahu, modely krychle a kvádru, sítě těles a milimetrový papír.

Jako zdroj úloh byla používána řada učebnic matematiky od nakladatelství ALTER, rozebraných podrobněji v oddíle 3.2 a také interaktivní didaktické učební materiály z portálu www.dumy.cz.

V závěru rozhovoru jsem se zeptal na největší obtíže v oblasti obsahů geometrických obrazců. Paní učitelka u žáků vnímala jako největší problém samotné pochopení toho, co znamená jednotka obsahu. Dále činilo problém převádění těchto jednotek. Tvrdila, že vybudování představy o jednotkách pro ni byla jedna z nejsložitějších částí geometrie.

4.2.1.2 Období 2. stupně

Jak již bylo uvedeno, po přechodu na druhý stupeň zbylo z původní třídy pouze 20 žáků. Třída ztratila vůdčí osobnosti, které byly na prvním stupni považovány za „tahouny“ v matematice. V šestém ročníku se opakovalo a prohlubovalo učivo z prvního stupně, obsahy obdélníku a čtverce, povrchy krychle a kvádru, výpočet obsahů složených obrazců. Geometrii byl věnován přibližně stejný počet hodin jako na prvním stupni. Nové téma, s nímž se žáci setkali, byl objem krychle a kvádru.

Přibližně polovina žáků třídy měla s počítáním obsahů útvarů problémy. Spousta z nich nerozeznávala rozdíl mezi obsahem a obvodem a neměla pro obsah vybudován multiplikativní vztah. U většiny z nich se jednalo pouze o formální znalost vzorce bez hlubší zkušenosti s jeho použitím, což znesnadňovalo následně i práci při zavádění vztahů pro objem těles. Jakmile jsem zadal například úlohu se známým obsahem obdélníku a délkou jeho jedné strany, žáci se cítili bezradně. Na odstraňování tohoto formálního poznání jsem pracoval pomocí začleňování geometrických úloh do jiných oblastí, jako například do dělitelnosti (pokrývání podlah dlaždicemi o zadaném obsahu, rozstříhávání papírových obdélníků na co největší čtverce) či desetinných čísel (násobení desetinných čísel pomocí velkého čtverce 10×10 čtverečků, např. $0{,}2 \cdot 0{,}3 = $ $= 0{,}06$.

V této třídě mi obecně činilo problémy pracovat konstruktivistickým způsobem, o který jsem se od 6. ročníku snažil. Žáci stále vyžadovali nějaký vzoreček nebo postup. Musím říct, že v průběhu šestého ročníku se to postupně zlepšovalo, ale bohužel se tento přístup nepodařilo odstranit úplně. Problém také činila skupinová práce. Kolektiv byl rozdělen na chlapce a dívky a leckdy chlapci a dívky společně odmítali pracovat. Celý problém vygradoval pár týdnů před zahájením experimentální výuky, kdy ve třídě byla odhalena šikana třetího stupně, což zapříčinilo složitější atmosféru pro práci, protože se vztahy ve třídě naprosto změnily.

4.2.2 Třída 7. C – vedena Hejného metodou

Tato třída byla ve školním roce 2015/16 složena z 26 žáků, 11 chlapců a 15 dívek. Na druhý stupeň přestoupilo z původní třídy 20 žáků. Pět z nich přišlo ze třídy, jež byla zrušena z důvodu malého počtu žáků, jeden žák se do aktuální třídy dostal kvůli nutnosti opakovat ročník. Z hlediska prospěchu v matematice patřila 7. C na prvním stupni, podle paní učitelky, k průměru. Bylo v ní několik vyhraněných osobností, například žákyně Markéta jako vůdčí typ respektovaný všemi měla schopnost nadchnout se téměř pro vše a svým chováním strhnout třídu. Bohužel tato žákyně třídu opustila a přestoupila na gymnázium.

Pracovně se jednalo o skupinu spíše méně aktivní. Vztahy byly podle paní učitelky „korektní" s různými interakcemi mezi konkrétními žáky. Přibližně 2–3 žáci vyvolávali ve skupině spíše negativní emoce. Tito žáci zůstali ve třídě i na druhém stupni. Motivovanost k učení se dala považovat za velmi různorodou. Bohužel ti nejvíce motivovaní (5 žáků) odešli na osmiletá gymnázia. Třída není různorodá jen motivací k učení. Ve třídě je vzděláván 1 žák s diagnostikovaným ADHD a dalších 5 žáků s diagnostikovanou specifickou poruchou učení, z nichž nejčastější je dysgrafie a dyslexie. Třída byla vedena silně konstruktivistickým přístupem a výuka vycházela z tzv. Hejného metody.

4.2.2.1 Období 1. stupně

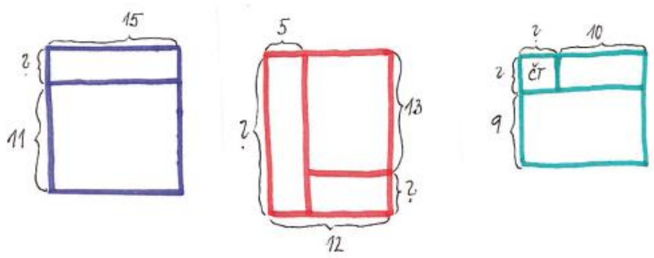
Paní učitelka věnovala geometrii přibližně 1/5 všech hodin matematiky. Během prvního a druhého ročníku se pomocí manipulace žáci seznamovali se základními geometrickými útvary a postupně je zakreslovali na čtverečkovaný papír. Během třetí třídy dále zkoumali, kolik čtverečků je uvnitř zakresleného obrazce. Již ve třetí třídě pak dokázali pro čtverec a obdélníky zakreslené přesně v mříži (strany odpovídají linkám sítě) spontánně používat vzorce na výpočet obsahu (resp. obvodu). Pomocí čtvercové sítě pak dokázali určit obsah u všech mřížových obrazců, takových, jež měly vrcholy v mřížových bodech[5].

Jednotky obsahu byly zaváděny pomocí zkušenosti s obsahem ve čtvercové síti. Žáci dlouho určovali obsah na čtverečky. Z nich dále odvozovali klasické čtvereční jednotky. Také věděli, že záleží na tom, na jaké čtverce daný útvar rozdělují (pokud měl tedy čtverec stranu dlouhou 1 cm – byly to cm^2, měl-li stranu dlouhou 1 mm, byl to mm^2 atd.). Paní učitelka uvedla, že se žáci setkávali hlavně s následujícími typy úloh:

- zjišťování obsahu útvaru,
- pokrývání podlahy s využitím prostředí parketování i bez něj,

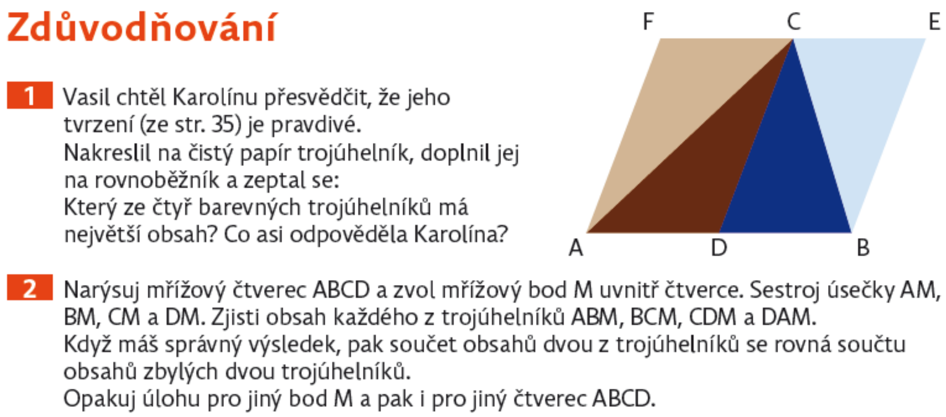
[5] bod na čtverečkovaném papíře, který leží na průsečících mříže

– hledání útvarů o stejném obsahu,
– sítě krychle a dalších těles,
– určování povrchu kvádrů sestavených z krychlí,
– dopočítávání údajů u obrazců složených ze čtverců a obdélníků (byly známy některé délky, obvody, obsahy), viz obrázek 4.1,



Obrázek 4.1: Složené útvary – dopočítávání údajů (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010)

– zdůvodňování, viz obrázek 4.2.



Obrázek 4.2: Ukázka úloh na zdůvodňování (Hejný, Jirotková, Bomerová, 2010, s. 97)

Od třetí třídy využívala paní učitelka učebnice nakladatelství Fraus od kolektivu vedeném Milanem Hejným. Pro práci s obsahy geometrických útvarů nejvíce využívala čtverečkovaný papír, dřívka a geoboardy. Podle paní učitelky dělalo žákům největší problém používání jednotek a také určování obsahů bez opory čtverečků.

Nakonec jsem se dotazoval na to, zdali, a eventuálně v jakých situacích, se žáci na prvním stupni setkali s obsahem trojúhelníku nebo rovnoběžníku. Z rozhovoru s paní učitelkou vyplynulo, že byli schopni počítat obsah pravoúhlého trojúhelníku – dokreslovali si trojúhelník na obdélník či čtverec, jež půlili. Pomocí čtvercové sítě a rozřezávání útvaru dokázali někteří vypočítat i obsah rovnoběžníku.

4.2.2.2 Období 2. stupně

V této třídě už od počátku 6. ročníku nebyl problém s výukou, kterou jsem se snažil koncipovat tak, aby vycházela z myšlenek konstruktivismu. Žáci byli zvyklí na práci ve skupinách a kromě pár jedinců jim nečinilo problém pracovat s kýmkoliv, ať už v náhodně zvolené nebo mnou předem vybrané skupině. Žáci byli vedeni k tomu, aby si bez problému představovali své názory a následně je komentovali. Jako třída jsou žáci zvyklí o problémech diskutovat. Odlišností 7. C je to, že pracovní prostředí není klidné, a i když se zdá, že je v této třídě hluk, tak žáci většinou vedou diskuse s matematickou tematikou nebo o tématu na ni navazující, případně si problém vzájemně vysvětlují. Mnohdy mě mrzí, že tyto diskuse musím přerušit. Jako učiteli mi ze začátku činilo problém si na toto třídní klima zvyknout.

Velká skupina žáků je motivována k učení matematiky, a to velmi usnadňuje společné řešení úloh. Žáci si rádi zadané matematické problémy počítají svým způsobem. V této třídě není východiskem dát jeden konkrétní postup, protože vím, že by ho žáci nepřijali za svůj a nevyužívali by jej. Tento způsob práce volím pro slabšího žáka. Je znát, že ve skupině byli žáci vedeni k hledání několika možných postupů řešení a setkávali se též s divergentními úlohami, tedy takovými, které mají více než jedno řešení.

Co se týká geometrie, většina žáků má dobrou představu o obsahu a umí s obsahem pracovat, a to jak v rámci čtvercové sítě, tak mimo ni. Rozhovor s paní učitelkou potvrdil, že slabším žákům činila problém práce bez čtvercové sítě a využívání čtverečních jednotek. Velký problém také představovaly převody jednotek obsahu. Stejně jako v 7. B jsem se snažil začlenit geometrická témata i do jiných oblastí matematiky, a to zejména do tematiky zlomků a desetinných čísel. Z hlediska výsledků na druhém stupni se jedná o třídu nadprůměrnou. Důkazem toho jsou výsledky šetření společnosti SCIO *Stonožka* v rámci šestých tříd, nadprůměrné výsledky v matematické soutěži *Klokan* v 6. i 7. ročníku a také v mezinárodní soutěži *Pangea*.

4.3 Pre-test

Před samotným plánováním výuky byl žákům obou tříd zadán diagnostický pre-test zaměřený na určování obsahů rovinných obrazců. Z třídy 7. C bylo testování přítomno 20 žáků a z třídy 7. B 19 žáků. Test byl složen z pěti úloh seřazených od nejjednodušší po nejsložitější a k jejich vypracování bylo vyhrazeno 20 minut. Úlohy byly vybírány tak, aby se daly řešit více způsoby. Před zadáním testu nebyla látka cíleně opakována, aby bylo vidět, jak moc mají žáci uloženy poznatky v paměti. V průběhu testování nebyla ze strany žáků položena žádná otázka nebo vznesena námitka týkající se zadání[6].

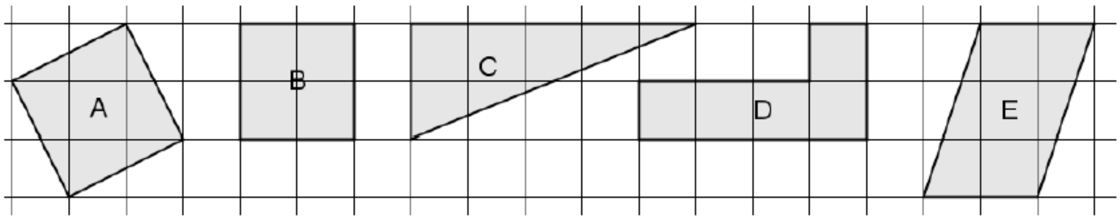
Časový limit k vypracování se při vyhodnocování ukázal jako dostatečný. Pouze 10 % žáků nezvládlo test dokončit včas. Nejrychlejšímu žákovi ze 7. C dokonce stačilo k vypracování

[6] Viz příloha 7.1.

pouhých 5 minut. V průměru bylo na vyplnění testu potřeba přibližně 14 minut. Při analýze žákovských řešení jsem se zaměřil především na jejich chyby, které by mohly mít vliv na průběh plánované experimentální výuky. Následně jsem porovnával průměrné úspěšnosti řešení jednotlivých úloh, a to nejen v rámci jednotlivých tříd, ale také v celkovém souboru. V následující části postupně představím jednotlivé úlohy z testu včetně dosažených výsledků.

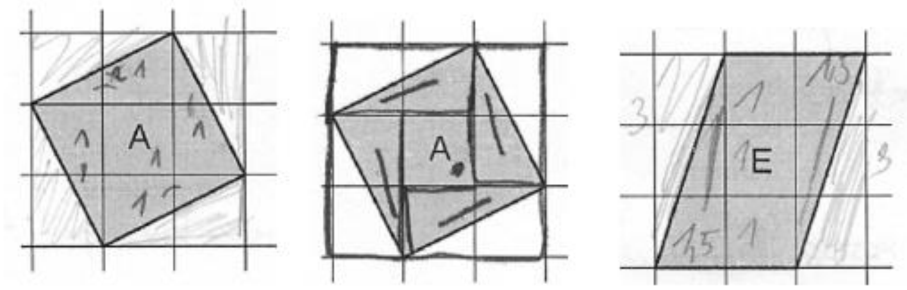
4.3.1 Úloha 1 – Čtvercová síť

1. Na obrázku vidíte geometrické obrazce umístěné ve čtvercové síti. Každý čtverec čtvercové sítě má obsah 1 cm². Vypočítejte obsahy jednotlivých obrazců.

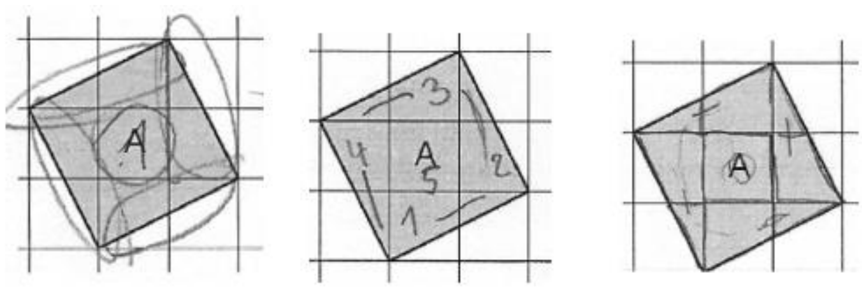


Obrázek 4.3: Zadání úlohy 1

První úloha byla zaměřena na práci se čtvercovou sítí a jednotkou cm². Obrazce byly navrženy tak, aby k určení obsahu bylo zapotřebí rozdělování na menší části a následné seskupování do známých tvarů (zejména obrazce A, C a E). K řešení se dalo využít i *komplementu* daného útvaru, kdy žák nalezl větší útvar, do kterého „vložil“ útvar původní. Hledaný obsah pak našel postupným odčítáním obsahu přebytečných částí, většinou pravoúhlých trojúhelníků. Obsah obrazce A byl roven 5 cm², zapsáno $S_A = 5$ cm², dále pak $S_B = 4$ cm², $S_C = 5$ cm², $S_D = 5$ cm² $S_E = 6$ cm².



Obrázek 4.4: Ukázky postupů řešení s využitím komplementu

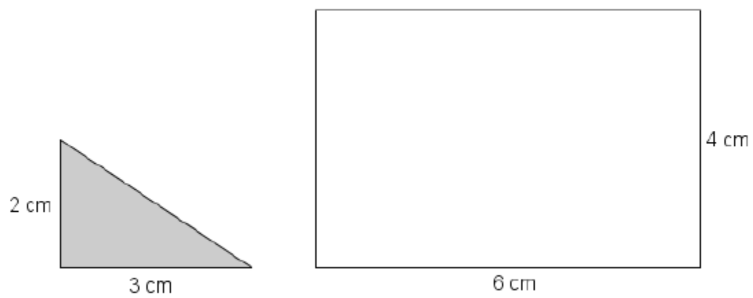


Obrázek 4.5: Ukázky postupů řešení s využitím rozdělování na více útvarů

Celková průměrná úspěšnost 90 % nasvědčuje tomu, že žáci mají předchozí zkušenosti s prací ve čtvercové síti. V rámci jednotlivých tříd se úspěšnost příliš nelišila (7. B – 87 %; 7. C – 93 %). Nejčastější chybou bylo neuvedení jednotky, ve dvou případech se neobjevila jednotka cm^2, ale jednotka čtvereček (□), což v tomto kontextu nebylo bráno jako chyba.

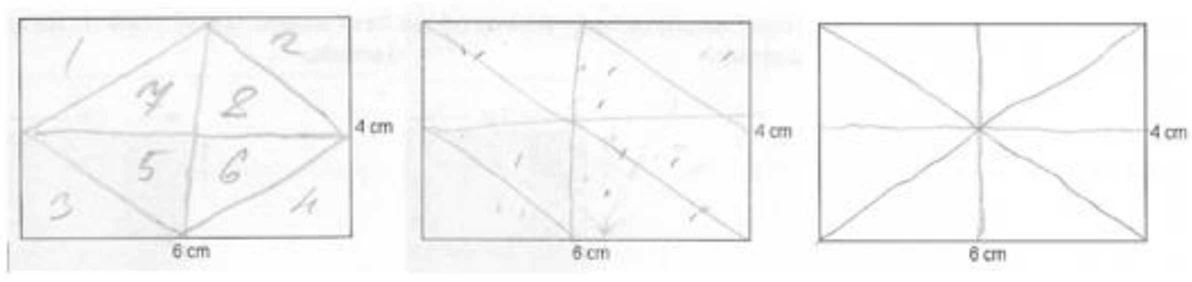
4.3.2 Úloha 2 – Vyplňování obdélníku

2. **Kolik trojúhelníků shodných s vybarveným trojúhelníkem je potřeba k úplnému pokrytí plochy obdélníku? Vyznačte do obrázku.**



Obrázek 4.6: Zadání úlohy 2, úloha z TIMSS 1999 (Palečková a kol., 2001)

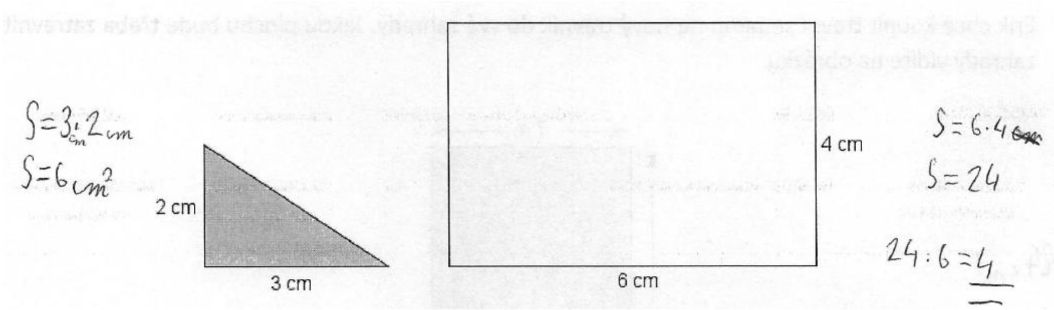
Druhá úloha byla orientována na použití jiné jednotky než centimetr čtvereční a na následné vyplňování obrazce touto jednotkou. Způsobů řešení, jak se dostat ke správné odpovědi 8 trojúhelníků, bylo několik, jak lze vidět na obrázku 4.7.



Obrázek 4.7: Ukázka správných řešení

Průměrná úspěšnost při řešení této úlohy se ukázala v obou třídách jako relativně vysoká (7. C – 85 %, 7. B – 73 %) vzhledem k 55% úspěšnosti českých žáků 8. ročníku v rámci šetření TIMSS 1999[7] (Palečková a kol., 2001, s. 41). Získané výsledky z pre-testu nasvědčují, že žáci mají předchozí zkušenosti s pokrýváním útvarů jinými než čtvercovými jednotkami.

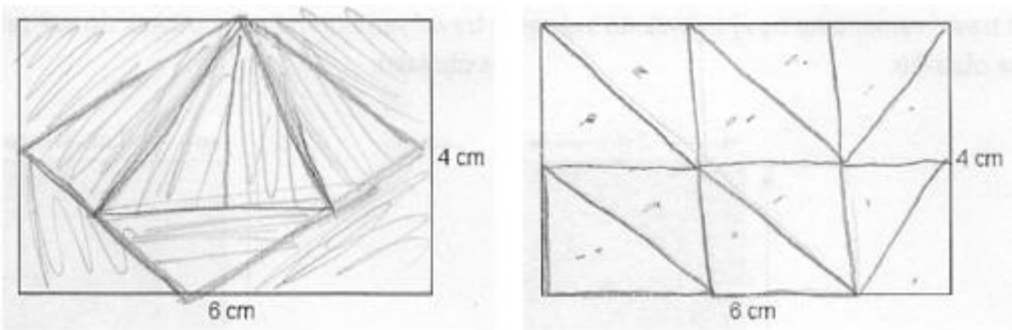
[7] Výsledky TIMSSu jsou již z roku 1999, avšak jak ukázali Rendl a Vondrová (2014), výsledky českých žáků v oblasti míry se od té doby spíše zhoršily.



Obrázek 4.8: Ukázka chybného řešení z úlohy 2

Mezi špatnými odpověďmi se ve dvou případech objevilo, že obdélník se dá pokrýt čtyřmi trojúhelníky, což byla i jedna z nabízených odpovědí v rámci TIMSS 1999. Úvaha žáků vedoucí k tomuto závěru byla správná, vydělit celkový obsah obdélníku obsahem trojúhelníku. Vztah pro obsah trojúhelníku byl ovšem zaměněn se vztahem pro obsah obdélníku, jak lze vidět na obrázku 4.8.

Jako další nesprávné odpovědi se objevila čísla jako 2, 6, 9 nebo 12. V těchto případech se kromě nesprávného výpočtu nepodařilo ani správně vyznačit rozdělení útvaru do zadání. Na obrázku 4.9 jsou vidět dvě ukázky nesprávného rozdělování útvaru.



Obrázek 4.9: Ukázky chybných řešení z úlohy 2

Stejná úloha byla ve výzkumné sondě (Vondrová, 2015, s. 315) zadána i žákům 7. ročníku. Oba vzorky nejsou sice srovnatelné, pro zajímavost se však můžeme podívat na jejich úspěšnost. Ze zmíněné sondy byla úspěšnost 71,9 %, tedy o něco málo nižší než úspěšnost v jednotlivých zkoumaných třídách v rámci pre-testu. Sonda též ukázala, že hojně užívanou řešitelskou strategií byla strategie početní, kterou v pre-testu naopak využili pouze dva žáci a navíc nesprávně.

4.3.3 Úloha 3 – Klasický výpočet obsahu obdélníku

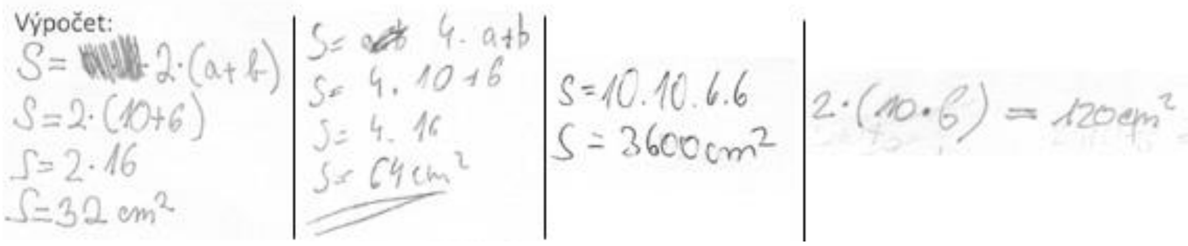
3. Vypočítejte obsah obdélníku, jestliže délka jedné jeho strany je 10 cm a délka jeho druhé strany je 6 cm.

Obrázek 4.10: Zadání úlohy 3

Třetí úloha byla do testu vybrána, protože se jedná o klasickou úlohu, která je k nalezení ve většině učebnic z prvního i druhého stupně. Máme zadané strany obdélníku a úkolem je nalézt jeho obsah. K výpočtu nepotřebujeme žádného mezikroku. V úloze nebyly strany záměrně pojmenované a a b. Cílem bylo sledovat, zda mají žáci vybudován multiplikativní vztah pro obsah nezávislý na vzorci pro obsah obdélníku.

Ve výsledcích této úlohy již byly patrné rozdíly mezi jednotlivými třídami, objevilo se i větší množství formálních poznatků. Správné řešení bylo 60 cm^2. Kromě tří žáků se všem testovaným podařilo správně uvést příslušnou jednotku obsahu. Úspěšnost 7. C byla 87 %, zatímco 7. B dosáhla úspěšnosti 64 %. Nižší úspěšnost ve druhé třídě mohla být zapříčiněna vynecháním pojmenování jednotlivých stran. Jak již bylo řečeno ve třetí kapitole zaměřené na analýzu učebnic, v učebnicích od nakladatelství Alter využívaných právě pro výuku na prvním stupni pod délkami stran nejčastěji vystupují pouze písmena a a b, navíc vztah je v učebnici prezentován ve tvaru $S = a \cdot b$ a je přímo odvozen bez hlubšího poznávání na malém množství izolovaných modelů.

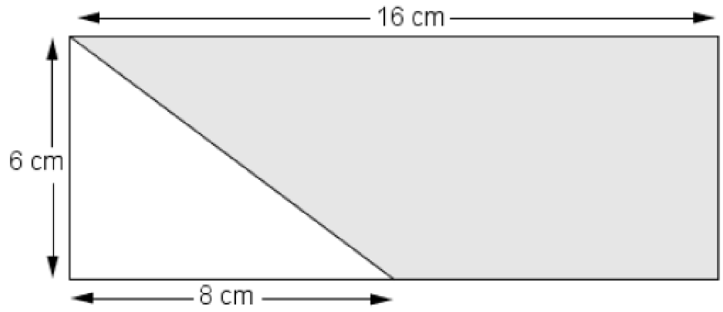
Nejčastější chybou v řešeních byla záměna vztahu pro obsah a obvod obdélníku, vedoucí k výsledku 32 cm^2. V 7. B došlo k záměně dokonce v sedmi případech, a navíc se u řešení téměř vždy objevil vzorec pro obvod. Na první pohled bylo patrné, že žáci tento vzorec nemají podložený hlubší zkušeností a že se jedná pouze o formální poznatek. V porovnání se 7. C, kde byla pouze tři nesprávná řešení, je to velký rozdíl. Obrázek 4.11 ukazuje ukázky nesprávných řešení. V prvním výpočtu zleva je vidět výše zmiňovaná záměnu vztahu pro obvod a obsah obdélníku, ostatní postupy ukazují další příklady formálních poznatků, poslední z nich nápadně připomíná vzorec pro objem navíc z největší pravděpodobností zaměněný se vzorcem pro obvod obdélníku se špatně použitými operacemi.



Obrázek 4.11: Ukázky nesprávných řešení z úlohy 4

4.3.4 Úloha 4 – Obsah lichoběžníku

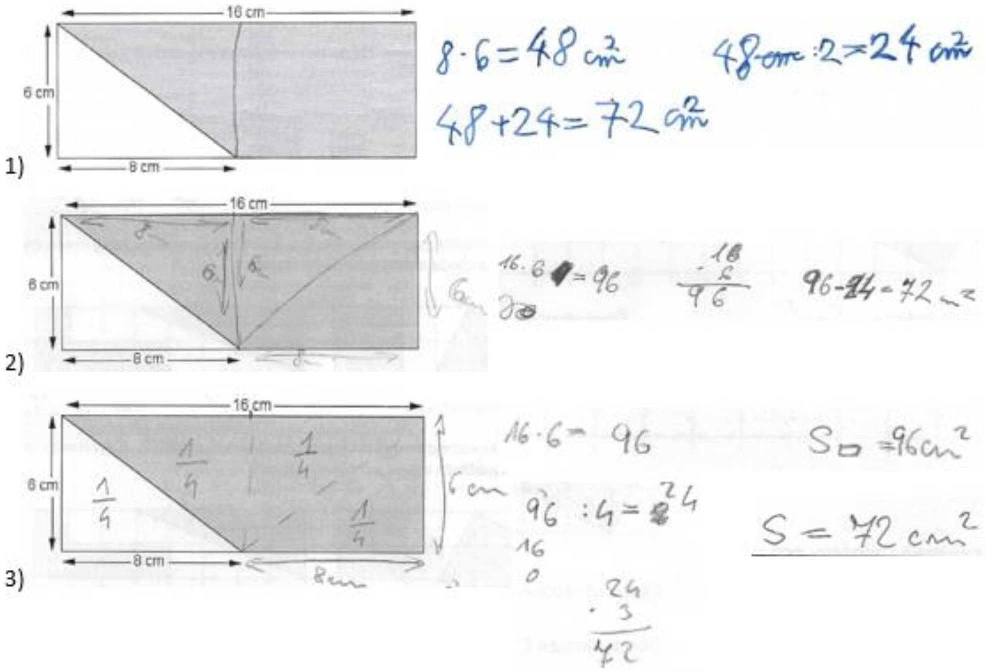
4. Kolik cm² je obsah vybarvené části obdélníku na obrázku?



Obrázek 4.12: Zadání úlohy 4 – TIMSS 2007 – M11-07 (Tomášek et al., 2009)

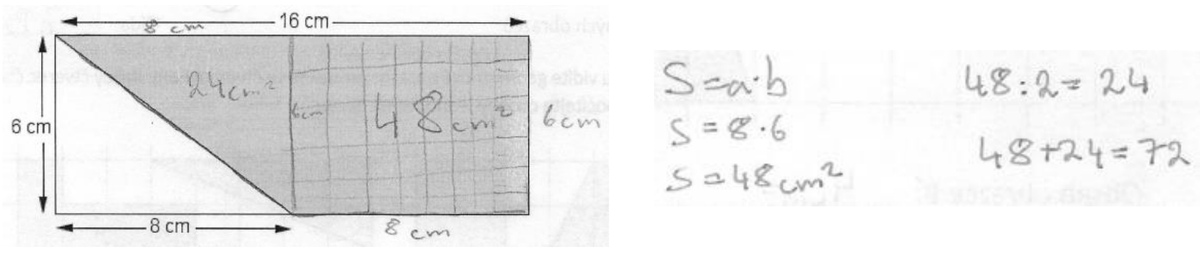
Úlohu, jejíž zadání je na obrázku 4.12, bych již zařadil mezi ty obtížnější. Nejen, že je pro její řešení předpokládána znalost vztahu pro obsah obdélníku, ale navíc od žáků vyžaduje úvahu, že obsah pravoúhlého trojúhelníku o délkách odvěsen 8 cm a 6 centimetrů je polovina obsahu obdélníku se stejnými rozměry. S izolovanými modely tohoto poznatku se již žáci setkali v 6. ročníku. Jinou úvahou a vhodným rozdělením útvaru na stejné části žák může zjistit, že bílá část tvoří ¼, a šedá ¾ obsahu celého útvaru, a tento poznatek pak využít pro hledání obsahu vybarvené části. Očekávanou dovedností je samozřejmě schopnost nalézt parametry pro výpočet přímo v obrázku, případně si z nich některé dopočítat. Žák mohl využít navíc i poznatků o vyplňování prostoru z úlohy 2.

Jak je z předchozího odstavce patrné, obtížnost úlohy tkví zejména ve faktu, že řešení není možné pouze v jednom kroku, vždy vyžaduje minimálně kombinaci úvahy a výpočtu. Správné odpovědi 72 cm^2 s kompletním řešením se dopočítalo v 7. C 10 žáků, tedy přesně polovina. V 7. B bylo toto číslo ještě poloviční, tedy pouze 5 žáků, což činí přibližně ¼ celé třídy. Celková úspěšnost řešení této úlohy činila 53 %, v 7. C přibližně 66 % a v 7. B rovných 40 %. Do celkové úspěšnosti této úlohy bylo započítáno nejen nalezení správného výsledku, ale i to, jak se žák k výsledku dopracoval. Úspěšnost řešení totožné úlohy u žáků 7. ročníku v sondě (Vondrová, 2015, s. 298–299) byla 55,7 %, z čehož plyne, že výsledky 7. C jsou lehce nadprůměrné, naopak výsledky 7. B podprůměrné.



Obrázek 4.13: Ukázka třech různých způsobů řešení úlohy 4

Obrázek 4.13 ukazuje tři různá řešení použitá při řešení úlohy 4 v 7. C. V prvním způsobu žák rozdělil útvar na více menších útvarů, konkrétně na obdélník a dva pravoúhlé trojúhelníky. Dále vypočítal obsah obdélníku, který následně vydělil dvěma pro nalezení obsahu jednoho ze shodných trojúhelníků. Výsledný obsah nalezl jako součet obsahů obdélníku a trojúhelníku. Druhý způsob využívá metody „odřezávání“. Žákyně v tomto případě nejprve vypočítala obsah celého útvaru a následně odečetla obsah bílé části, který je čtvrtinový. Ve třetím způsobu využívá žákyně rozdělení na čtyři shodné útvary, jak naznačuje i zapsání zlomku. Následně počítá tři čtvrtiny z celkového obsahu obrazce, tedy nejprve vydělí výsledek čtyřmi a následně ho vynásobí třemi. Závěrem bych ještě rád ukázal jedno zajímavé řešení ze 7. B, které poukazuje na porozumění obsahu. Žákyně se v něm dostává k podstatě obsahu a dokreslením čtverečků si strukturuje prostor na jednotky.

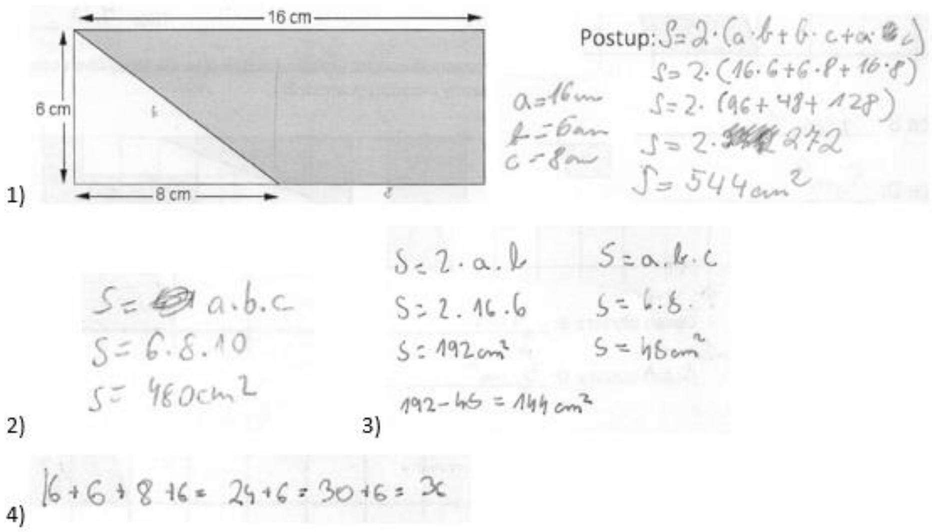


Obrázek 4.14: Ukázka žákovského řešení ze 7. B

V případě této úlohy je velice zajímavé i podrobněji prozkoumat chybná řešení. Mezi nejčastějším chybným výsledkem se objevil ve čtyřech případech údaj 24 cm^2, který ovšem odkazuje na jiný než matematický problém, a to konkrétně na nedostatečnou analýzu zadání žákem nebo na nejednoznačnost zadání. Nalezení tohoto řešení je totiž stejně kognitivně náročné, 24 cm^2 je právě obsah bílé části a pro jeho výpočet je nutné využít vztahu mezi obdélníkem a pravoúhlým trojúhelníkem v kombinaci s hledáním parametrů v obrázku, eventuálně rozdělení celého útvaru na menší útvary. Při rozboru řešení s jedním konkrétním žákem se mi dostalo reakce, že *i bílá barva je barva, a že tedy nevěděl, kterou část myslím*. Při případném opakovaném využití této úlohy bych doporučil v zadání změnit slovní spojení *obsah vybarvené části* na *obsah šedé části*.

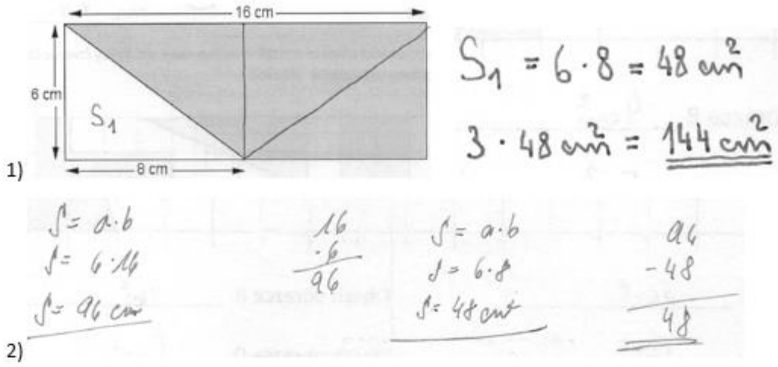
V šetření TIMSS 2007, jehož se zúčastnilo 4845 žáků 8. ročník, se odpověď 24 cm^2 vyskytla jako druhá nejvíce volená špatná odpověď (20,4 %) hned po odpovědi 48 cm^2 (23,2 %), která se naopak v pre-testu objevila pouze jedenkrát. Třetí špatná odpověď 44 cm^2 se v pre-testu neobjevila vůbec (Rendl, Vondrová, 2014).

Využití nesprávného vzorce bylo dalším zdrojem chyb. Opět se ukázalo, že ve větší míře se objevily chyby tohoto charakteru v 7. B, kde se jednalo o 7 případů, zatímco ve druhé třídě to byly případy 4. Zajímavostí je, že ve většině chybných řešení v 7. B byl zapsán nějaký algebraický vzorec pro výpočet, což svědčí o předchozím zavádění obsahů právě pomocí vzorců, jejichž znalost je spíše formální než založená na zkušenosti. Mezi nejčastější chyby se opět jednalo v první řadě o záměnu vztahu pro obvod a obsah. Dále se při výpočtech objevily dokonce vzorce pro povrch kvádru nebo jeho objemu.



Obrázek 4.15: Ukázky chybných řešení se záměnou vztahu

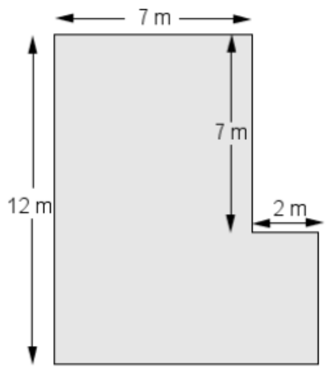
V poslední skupině nesprávných řešení se vyskytlo korektní využití vztahu pro obsah obdélníku, ale následně už chyběla úvaha o obsahu trojúhelníku a spojitost s celkovým obsahem vybarveného útvaru. Žáci tedy ve většině případů počítali pouze obsah celého obdélníku nebo menšího obdélníku s polovičním obsahem, pokud si útvar rozdělili na menší části. Někdy se objevilo i správné rozdělení, ale následně už chybělo využití této informace.



Obrázek 4.16: Ukázky chybných řešení bez úvahy o obsahu trojúhelníku

4.3.5 Úloha 5 – Zatravněná plocha

5. Erik chce koupit travní semeno na nový trávník do své zahrady. Jakou plochu bude třeba zatravnit? Plán zahrady vidíte na obrázku.

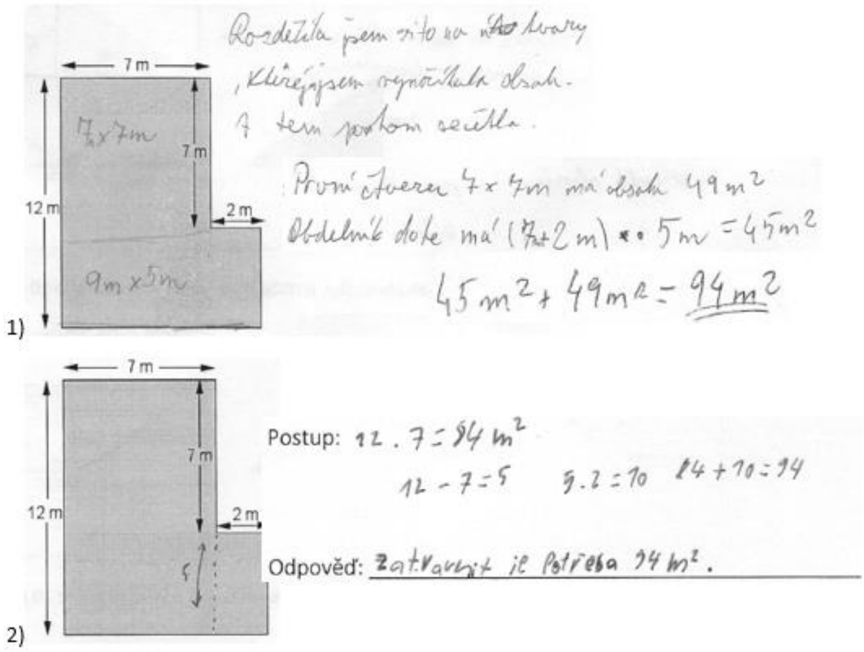


Obrázek 4.17: Zadání úlohy 5

Výsledky poslední úlohy nasvědčují tomu, že se jednalo o úlohu pro žáky nejobtíženější, zároveň o úlohu, kde se ukázal naprosto největší rozdíl mezi úspěšnostmi jednotlivých tříd. Důvodů případného neúspěchu mohlo být hned několik. V první řadě se v zadání přímo neobjevuje slovo *obsah*, ale *plocha*. Úloha je v testu zařazena jako poslední. K výpočtu nelze opět jako v předchozí úloze dospět pouze jedním krokem. Žáci jsou nuceni prokázat schopnost nalézt parametry potřebné k výpočtu přímo v obrázku a následně jich umět využít. K tomu musí ve většině případů rozdělit útvar na menší útvary a celkový obsah pak nalézt jako součet obsahů všech menších částí nebo útvar doplnit na obdélník a poté od celkového obsahu obdélníku odečíst obsah „vyříznuté“ části. Pokud žáci správně počítali, dostali se k výsledku 94 cm^2.

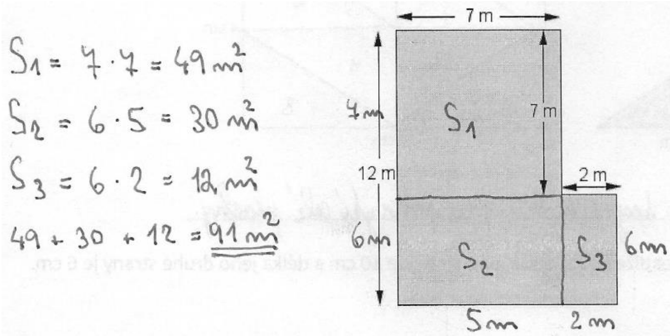
Zatímco tato úloha měla v 7. C celkovou úspěšnost 64 % a nelišila se moc od výsledků z předchozí úlohy, tak v 7. B byla úspěšnost pouze 25 %. Vzhledem k tomu, že do celkové úspěšnosti byl započítán nejen celkový výsledek, ale i postup řešení a použitá jednotka obsahu, je tedy zajímavé nahlédnout, kolik žáků skutečně vypočítalo úlohu kompletně. V 7. C se jednalo konkrétně o 12 žáků. Všichni tito žáci měli v pořádku nejen výsledek, ale i postup. V 7. B se správného výsledku dopočítali kompletně i s postupem pouze 2 žáci. 1 žák měl správně naznačený postup. Čemu mohou nasvědčovat tyto výsledky? Někteří žáci mají malé zkušenosti s úlohami, které vyžadují více než jeden krok při řešení. Dále může jít o malou zkušenost s prací s obsahy, a to zejména s obsahy, které není možné nalézt pomocí vzorců pro obsahy rovinných útvarů a u nichž je potřeba zjistit některé další parametry. Na špatné výsledky 7. B ukazuje i srovnání s výsledky podobné úlohy v sondě (Vondrová, 2015, s. 313), kde úspěšnost řešení u žáků 7. ročníku je 53,5 %. Naopak 7. C je opět svým výsledkem nadprůměrná.

Nyní se vrátím ještě ke konkrétním správným žákovským řešením. Bylo překvapivé, že téměř nikdo k řešení úlohy nevyužil myšlenky doplnění útvaru na obdélník, ale všichni původní útvar rozdělovali na útvary menší. Správná řešení byla výhradně s využitím rozdělení útvaru.

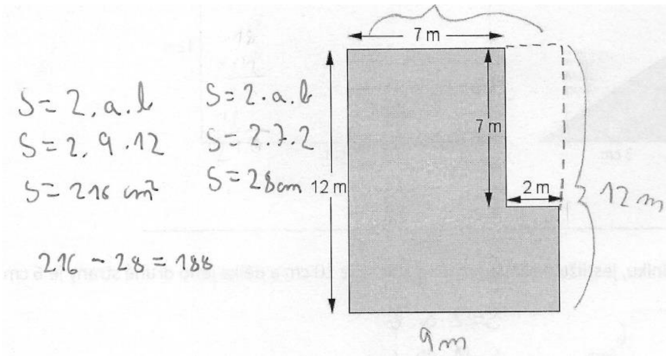


Obrázek 4.18: Ukázky správných řešení úlohy 5

Nesprávná řešení mají několik společných rysů s řešeními z předchozí úlohy, tedy se v nich opakuje nesprávné použití vzorců, záměna vztahů, zejména obvodu za obsah. Nalezneme zde i některé numerické chyby a podobně jako v předchozí úloze jsou některá řešení pouze částečná. Žáci například spočítali obsah pouze části útvaru nebo naopak útvar doplnili a neodečetli obsah přidané části.



Obrázek 4.19 – Úloha 5 – ukázka numerické chyby

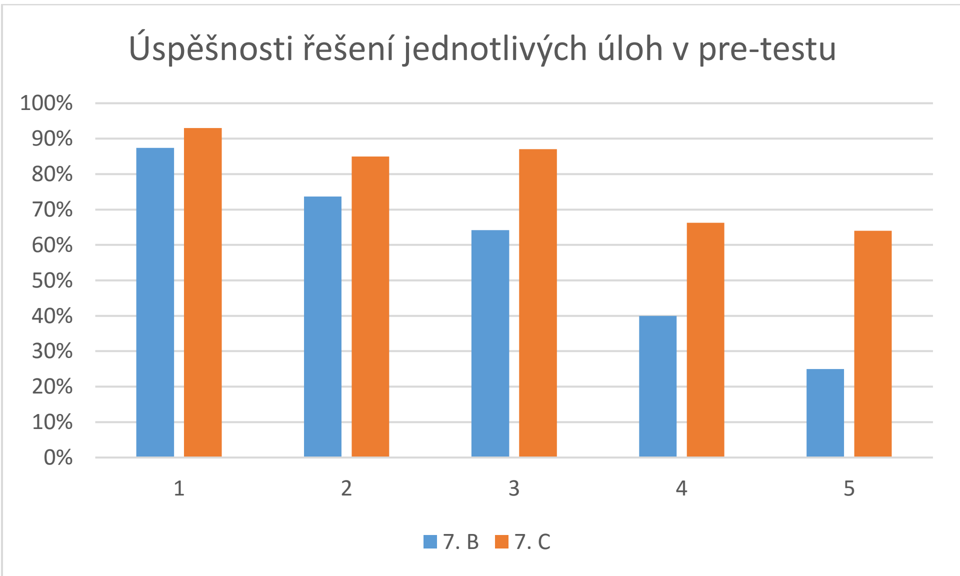


Obrázek 4.20: Ukázka využití chybného vztahu k výpočtu

4.3.6 Celkové výsledky a výstupy z pre-testu

Graf 4.1 ukazuje srovnání průměrných procentuálních úspěšností u jednotlivých úloh pre-testu v rámci tříd.

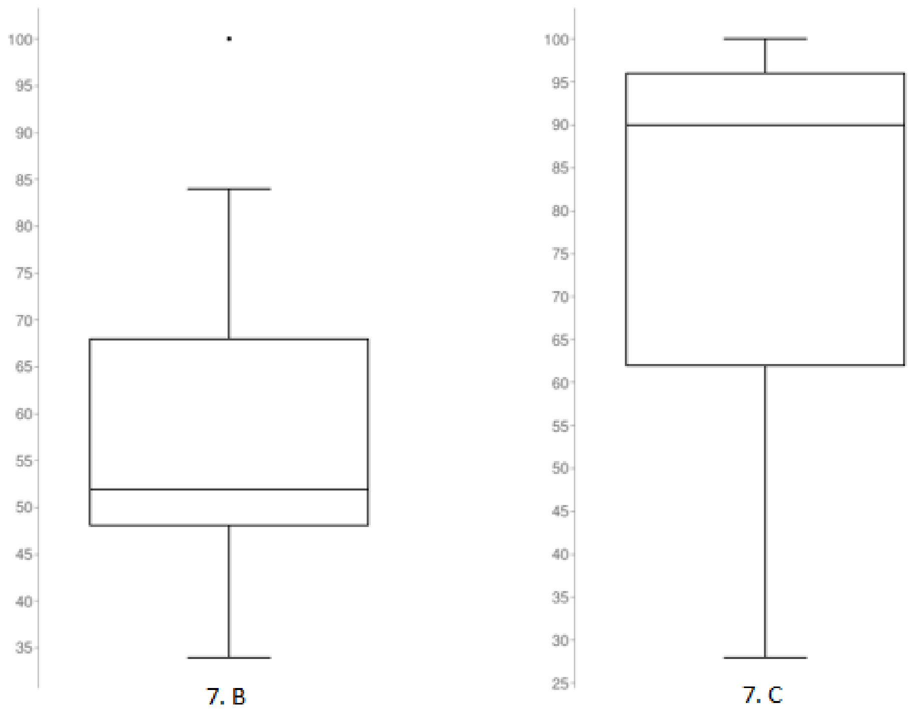
Graf 4.1



Jak již graf napovídá, mezi oběma testovanými třídami je patrný určitý rozdíl. Zatímco výsledky v7. C jsou víceméně vyrovnané s mírně klesající tendencí, tak ve třídě 7. B dochází se zvyšující se náročností úloh k vyššímu poklesu úspěšnosti. U úloh s vyšší kognitivní náročností, tedy konkrétně u úloh 4 a 5, byla 7. C výrazně úspěšnější. Výsledky naznačují, že nezanedbatelný počet žáků 7. B má zásadní problém s uchopením míry a malé zkušenosti s hledáním obsahů útvarů bez použití a opory vzorců. Navíc nesprávné užívání vzorců nasvědčuje tomu, že jejich znalost je většinou formální a nevznikla formou abstrakčních zdvihů opřených o větší množství izolovaných modelů.

Nyní představím výsledky celého testu. Úspěšnost řešení celého testu v 7. C činila přibližně 79 % a v 7. B to bylo 58 %. Pohled na tyto výsledky bohužel nevypovídá příliš o tom, jak vypadá soubor výsledků v jednotlivých třídách, proto jsem se rozhodl výsledky představit ještě jiným způsobem. Pro prezentaci celkových výsledků pre-testu jsem zvolil „krabicový graf", v angličtině též nazývaný *boxplot*. V této vizualizaci je střední „krabicová" část ohraničena shora 3. a zdola 1. kvartilem. Kvartilem se rozumí hodnota znaku, která dělí statistický soubor na čtyři stejné části. Druhý kvartil, tedy střední hodnota, je nazýván ve statistice medián a v krabicovém grafu ho představuje vodorovná čára umístěná v krabicové části.

Graf 4.2: Rozdělení úspěšností ve statistickém souboru



Levá část grafu představuje stupnici, na které je znázorněna průměrná úspěšnost v procentech. Z grafu je možné vidět, že nejnižší výsledek v 7. B je 34 % a v 7. C 28 %. Dále si lze povšimnout, že v obou případech byl nejvyšší dosažený výsledek 100 %, tedy správně vyplněný celý test. V případě 7. B se jednalo pouze o 1 výskyt, jak naznačuje tečka v grafu. Dále stojí za povšimnutí umístění mediánu, prvního a třetího kvartilu. V případě 7. C byl medián 90 %, z čehož plyne, že polovina žáků dosáhla úspěšnosti 90 % a vyšší, což ve zkoumaném souboru představuje počet 10 žáků. Z toho 5 dosáhlo úspěšnosti mezi 90–96 % a dalších pět úspěšnosti mezi 96–100 %. Naopak 5 žáků mělo výsledky mezi 62–90 % a 5 žáků mezi 28–62 %. U 7. B je patrné, že umístění mediánu je podstatně níže. Střední hodnota představuje hodnotu 52 %, z čehož plyne, že polovina žáků měla výsledky mezi 34–52 % (tedy přibližně 10 žáků) a polovina mezi 52–100 %. Následně první kvartil 48 % a třetí kvartil 67 % ohraničují krabicovou část. Asi nejzásadnější zjištění spočívá v tom, že přibližně tři čtvrtiny žáků ze 7. C bylo úspěšnější než tři čtvrtiny žáků 7. B.

Rád bych podotknul, že získané výsledky v žádném případě nehodnotí práci prvostupňového vyučujícího. Spíše poukazují na možný vliv využívaného přístupu jako celku a také na to, že může hrát roli způsob, jak se žáci s danými tématy seznamovali, a do jaké hloubky a s jakou mírou jejich zapojení řešili konkrétní úlohy. I proto jsem následnou experimentální výuku částečně zaměřil na reedukaci problémů, které pre-test naznačil. Do výuky bylo zařazeno více podnětných úloh, takových, kde by žáci měli uplatnit znalosti o obsahu obdélníku nebo čtverce, a pro jejichž vyřešení se primárně nevyužívá vzorců. Úlohy byly zvoleny tak, aby jejich řešení bylo přístupné žákům z obou tříd. Do plánu byly též zahrnuty úlohy na výpočet obsahů útvarů ve čtvercové síti. Práci v ní, jak naznačily i výsledky úlohy 1 z pre-testu, ovládají obě třídy, a proto by mohla fungovat jako vhodný nástroj na odhalení společných zákonitostí pro rovnoběžníky a trojúhelníky. Úlohy zařazené do výuky jsou též představovány v různých kontextech tak, aby žák nezískal pouze jednostranný pohled na danou tematiku.

4.4 Plán výuky

Téma: Obsah rovnoběžníku a trojúhelníku

Očekávané výstupy: Žák umí rozpoznat rovnoběžník a trojúhelník. Zná vlastnosti těchto útvarů a je schopen nalézt jejich obsahy.

Věk žáků: 12–13 let (7. ročník);

Potřebné znalosti a dovednosti žáků: žák rozumí tomu, co je obsah rovinného obrazce, a umí vypočítat obsah základních rovinných obrazců čtverce a obdélníku, žák umí ve čtvercové síti vypočítat obsahy útvarů s vrcholy v mřížových bodech.

Odhad počtu vyučovacích hodin: 4 + závěrečný test (rozdělení na vyučovací hodiny je spíše orientační, závisí na rychlosti žáků)

Potřebné pomůcky ke všem hodinám: interaktivní tabule, program Smart Notebook 11, pracovní listy, papírové modely rovnoběžníků a trojúhelníků, přípravy hodin pro interaktivní tabuli

Metoda: Výuka bude do velké míry založena na skupinové práci a principech popsaných v oddíle 2.1.

4.4.1 1. vyučovací hodina

Cíle hodiny: Žák se pomocí manipulativní činnosti a měření seznámí s modelem rovnoběžníku a s některými jeho vlastnostmi. Žák si vytvoří souvislosti mezi obsahem obdélníku a trojúhelníku.

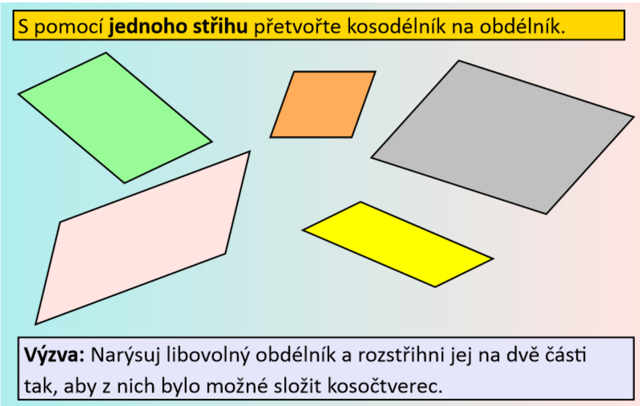
Pomůcky: příprava hodiny na interaktivní tabuli, vystříhané modely rovnoběžníků, pracovní list pro skupinu, čisté listy papíru, nůžky, rýsovací potřeby, menší papírky na vystřihování obdélníků

4.4.1.1 Aktivita 1 – motivace – rovnoběžník a jeho vlastnosti

Tato činnost by měla žákům sloužit pro zopakování známých pojmů. Současně by měla být propedeutikou pojmu *výška rovnoběžníku*, částečně by měla sloužit k odhalení souvislosti mezi kosodélníkem a obdélníkem. V průběhu této aktivity by měly zaznít pojmy jako např. *rovnoběžník*, *kosodélník* a *rovnoběžnost*. Není nutné zmínit vše a také není dobré se nad aktivitou příliš zdržovat.

Nejprve se třída rozdělí do dvojic (např. spolupracují sousedé v lavici), každý žák obdrží předem vystřižený model rovnoběžníku. Úkolem žáků je nalézt během maximálně dvou minut co nejvíce informací, které o útvaru položeném před nimi vědí. Informace zaznamenávají do sešitu. Na konci dvojice sdílí informace se třídou.

Dále žáci pracují samostatně. Cílem je, aby každý z nich jakýmkoliv způsobem s pomocí maximálně jednoho střihu přetvořil kosodélník na obdélník. Tato manipulativní činnost by měla sloužit jako motivace pro téma. Pro rychlejší žáky je navíc připravena výzva, jejíž zadání je na obrázku 4.21. Po dostatečně dlouhém čase je dobré, aby několik žáků sdílelo své úvahy se třídou a zároveň představilo ukázky svých střihů. Pro tuto situaci jsou na tabuli připraveny různé kosodélníky, do kterých je možné střih vyznačit.



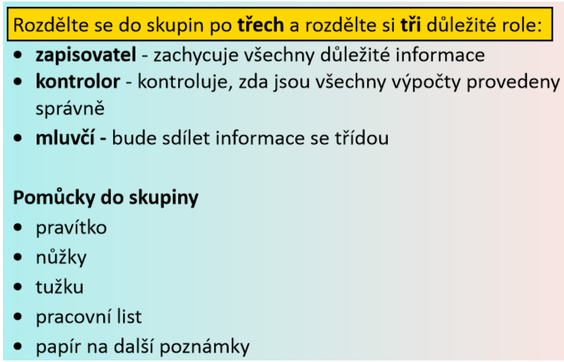
Obrázek 4.21: Motivace

Možné obtíže: Žáci nebudou vědět, co je to rovnoběžník. V takovém případě je nutné učinit dohodu, že rovnoběžník je čtyřúhelník, jehož protilehlé strany jsou rovnoběžné. Dále může nastat situace, kdy nebude jasné, co znamená střih. Pokud k tomu dojde, je potřeba si ujasnit, že se nejedná o počet střihnutí nůžkami, ale o rozstřižení útvaru na dvě části tak, aby byl střih rovný.

4.4.1.2 Aktivita 2 – obsah trojúhelníku a obdélníku – příprava izolovaných modelů

Cílem aktivity je, aby si žák zopakoval obsahy základních obrazců, jako jsou čtverec a obdélník, a zároveň se setkal s izolovanými modely obsahu trojúhelníku získaných na základě souvislosti s obsahem obdélníku. Aktivita je inspirována hodinou *Discovering the Area Formula for Triangles* umístěnou na webu *National Council of Teachers of Mathematics.*[8]

Celá aktivita bude probíhat formou práce ve skupině. Skupiny jsou rozdělené předem tak, aby rozdělení bylo rovnoměrné vzhledem ke schopnostem a dovednostem jednotlivých žáků. Rozdělení skupin je umístěno v přípravě hodiny pro interaktivní tabuli.



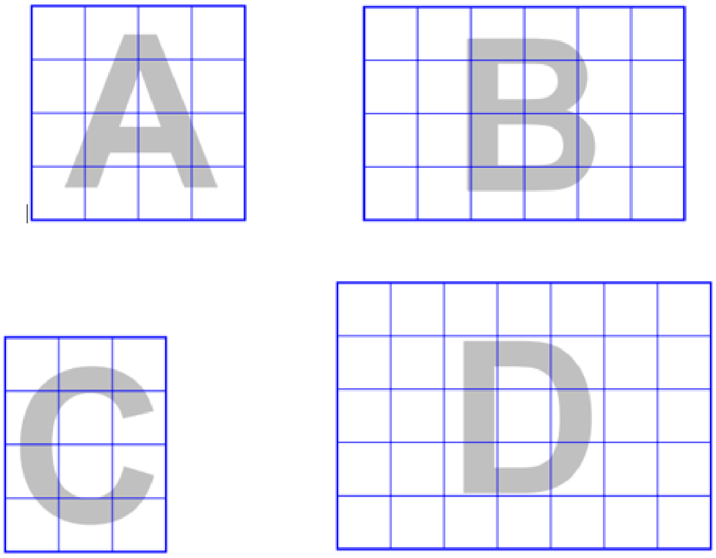
Obrázek 4.22: Popis skupinové práce

Učitel žákům představí všechny pomůcky a role nezbytné pro plnění skupinové práce. Po rozdělení do skupin žáci plní společně úkoly z pracovního listu. Úkolem je vystřihnout podle zadaných pravidel trojúhelník a naleznout jeho obsah. Celý průběh práce mají za úkol dokumentovat. V případě, že bude některá ze skupin výrazně rychlejší, je možnost zadat za úkol, aby z původních rozstříhaných obdélníků sestavovali rovnoběžníky. Případně jim zadat stejnou úlohu, jen s obdélníkem bez čtverečků. Učitel do práce příliš nezasahuje a sleduje postup jednotlivých skupin, případně může položit doplňující nebo směrující otázky.

Během závěrečné fáze na tabuli žáci pro kontrolu vyplňují tabulku svými výsledky. Každý výsledek by měl být u tabule okomentován, aby byl zjevný jeho původ. Názorná ukázka postupu na vystřižených trojúhelnících nebo formou náčrtku na tabuli je ideální. U obrazců B, C, D bych doporučil vyvolat více skupin s různě zvolenými mřížovými body, aby bylo vidět, že obsah trojúhelníku se nemění volbou mřížového bodu. Každá skupina nakonec představí jednu důležitou věc, kterou by si ostatní měli z proběhlé aktivity odnést.

Možné obtíže: Žáci špatně rozstřihnou obrazec. Pro tento případ je dobré mít několik rezervních kopií. Skupina nebude vědět, jak vypočítat obsah obdélníku nebo čtverce. V tomto případě je dobré si nechat poradit od jiné skupiny.

[8] http://illuminations.ntcm.org/Lesson.aspx?id=1874, citováno dne: 3. 4. 2016



Začněte vystřižením čtyřúhelníků A-D.

1) Nalezněte obsahy obrazců A-D a doplňte je do prvního řádku tabulky.
2) Za použití pravítka narýsujte **úhlopříčku** u obrazce A.
3) U každého z obdélníků B,C a D vyznačte na **horní** straně **mřížový bod**, který není vrcholem. Za pomoci pravítka spojte rovnou čarou spodní vrcholy se zvoleným bodem.
4) Obrazce rozstříhejte podél dorýsovaných čar.
5) Doplňte tabulku. Co zajímavého vidíte?

	A	**B**	**C**	**D**
obsah původního obrazce				
obsah odstřihnutých částí				
obsah zbylého obrazce				

6) Ve skupině se dohodněte, jaký nejdůležitější poznatek z této aktivity chcete sdílet se třídou.

Obrázek 4.23: Pracovní list

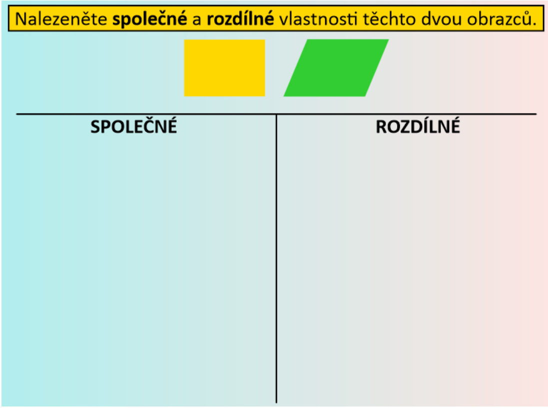
4.4.2 2. vyučovací hodina

Cíle hodiny: Žák dokáže nalézt obsah rovnoběžníků a trojúhelníků umístěných ve čtvercové síti s vrcholy v mřížových bodech, cílem je mimo jiné i to, aby se žák setkal s větším množstvím izolovaných modelů. Cílem je také budování vztahu mezi rovnoběžníkem, obdélníkem a trojúhelníkem.

Pomůcky: příprava na interaktivní tabuli, vystříhané modely určené ke skupinové práci, pracovní listy do skupin a pro jednotlivce.

Úvod hodiny: Žáci se rozdělí do předem připravených skupin po třech.

4.4.2.1 Aktivita 1 – společné a rozdílné vlastnosti



Obrázek 4.24: Zadání úvodního úkolu

Úvodní aktivita by neměla být dlouhá a měla by probíhat formou matematické rozcvičky. Žáci obdrží obálku s kartonovými modely obrazců, ve které se nachází obdélník, kosodélník a tři trojúhelníky. Všechny útvary mají shodnou délku strany a k ní příslušné výšky. Na pokyn žáci vyndají z obálky obdélník a kosodélník, se kterým budou v následující aktivitě pracovat. Cílem bude nalézt co nejvíce společných a rozdílných vlastností zkoumaných útvarů. Informace si skupiny zapisují na papír nebo do sešitu, následně sdílí se třídou a zaznamenávají je na tabuli (je možné zvolit jednoho zástupce ze třídy jako zapisovatele, může to být i učitel). Cílem této aktivity je zopakovat a připomenout všechny vlastnosti, které by mohly být nezbytné pro další průběh hodiny.

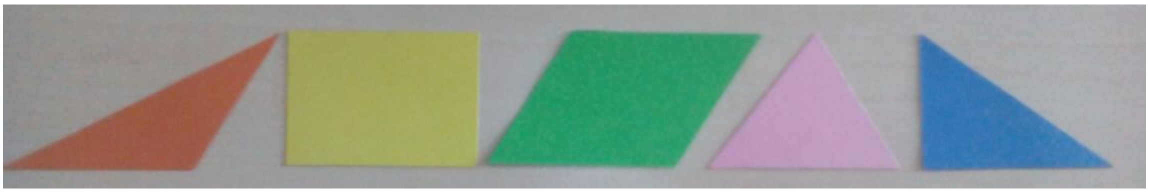
Poznámka: Není nutné zmínit všechny vlastnosti a vztahy, v průběhu hodiny je možné některé z nich doplňovat, učitel by neměl do této aktivity přílišně zasahovat, naopak by měl vyzývat žáky, aby svá tvrzení komentovali a případně zakreslovali na tabuli.

4.4.2.2 Aktivita 2 – skládačka – zkoumaní

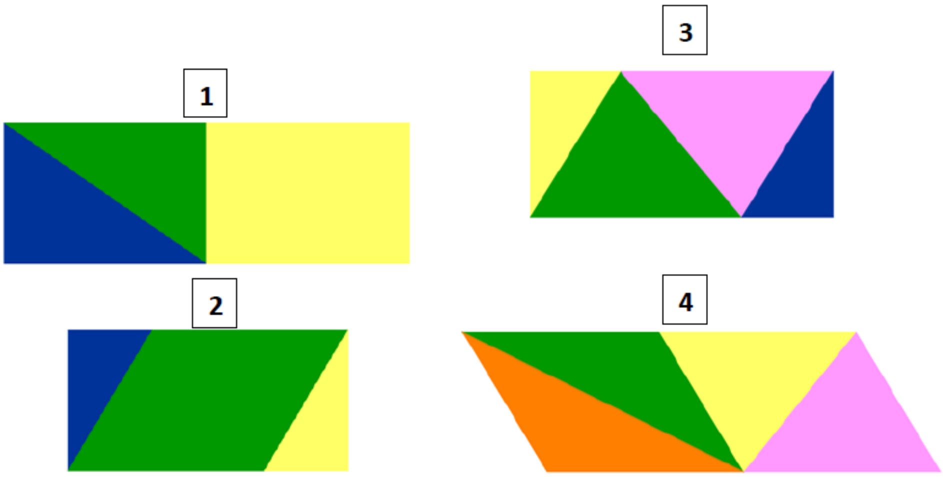
Cíle aktivity: Tato aktivita slouží jako propedeutika obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku. Žák by měl přirozenou cestou, zejména manipulací, objevit vzájemný vztah mezi těmito dvěma obrazci a s jeho pomocí být schopen vypočítat jejich obsahy. Tato aktivita nabízí velké množství izolovaných modelů obsahů, zejména pravoúhlých trojúhelníků, a poskytuje prostor pro objevení generického modelu obsahu trojúhelníku, eventuálně rovnoběžníku. Navíc rozšiřuje ve vědomí žáků poznatek, že různé tvary mohou mít stejné obsahy.

Pomůcky: obálky s papírovými modely obrazců (využívané v předchozí úloze), psací a rýsovací potřeby.

Popis aktivity: Aktivita probíhá formou skupinové práce v maximálním počtu tří žáků. Žáci sestavují čtyři zadané útvary, které vidí na lístečku vytaženém z obálky. K jejich sestavení mohou použít výhradně tvary nalezené v obálce. Musí využít jejich překrývání, tvary nijak nestříhají a nepřehýbají. Po správném sestavení obrazec načrtnou do sešitu a doplní k němu potřebné údaje. Do náčrtku uvedou obsahy jednotlivých viditelných barevných částí včetně výpočtu.



Obrázek 4.25: Útvary z obálky



Obrázek 4.26: Lísteček s útvary k sestavení vložený v obálce

V závěru žáci prezentují výsledky u tabule, využívají předpřipravených tvarů na tabuli a zakreslují do nich svoje úvahy a postupy. V této fázi je vhodný prostor pro diskuse nad získanými řešeními. Žáci sami by měli potvrdit správnost výsledného řešení a skupinově ji odsouhlasit před přechodem k další úloze.

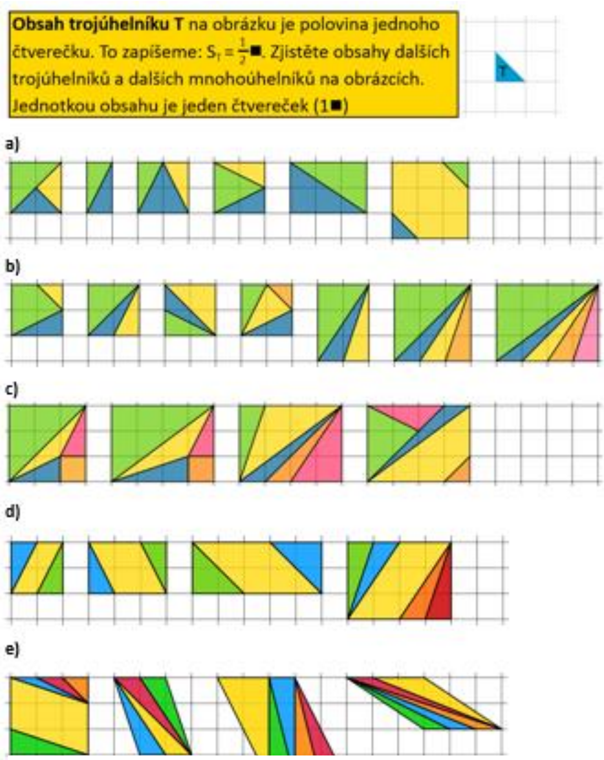
Poznámky: U této aktivity je třeba věnovat dostatek času experimentování a manipulaci, stejně tak jako prezentaci získaných výsledků. V případě problémů s výpočty obsahů je dobré mít vedle nakopírovanou čtvercovou síť, do které si žáci mohou, v případě potřeby, obrazce umístit. V průběhu této aktivity se tak seznámí s velkým množstvím překvapivých modelů, např. jako v obrazci 4, kde na první pohled není jasné, že všechny obsahy jsou stejné.

4.4.2.3 Aktivita 3 – čtvercová síť a závislosti

Cíl aktivity: Série úloh posiluje myšlenku doplňku útvaru, *komplementu*, a tím zprostředkovává efektivnější, a hlavně univerzální způsob hledání obsahů. Žáci by měli dospět k poznání, že trojúhelníky se stejnou délkou strany a k ní příslušné výšky mají stejné obsahy. Série úloh vede zároveň k nalezení nebo posílení generického modelu pro hledání obsahu trojúhelníku.

Pomůcky: pracovní list, připravené série úloh na tabuli.

Popis aktivity: Žáci pracují samostatně a hledají obsahy jednotlivých barevných částí. Je třeba jim nechat dostatečný čas a nabídnout eventuální možnost spolupráce nebo konzultace výsledků se sousedem. Na tabuli by se měly objevit všechny výsledky. Jen u některých je třeba komentovat, jak se dospělo k výsledku. Za pozornost stojí zejména poslední tři obdélníky ze série b), které vedou ke vztahu pro obsah trojúhelníku.



Obrázek 4.27: Pracovní list - série

Možné obtíže: Pokud žáci při této aktivitě spontánně neobjeví zárodek generického modelu pro obsah rovnoběžníku a obdélníku, je třeba klást otázky jako např. *co mají společného tyto dva obrázky* nebo *proč mají tyto dva trojúhelníky stejný obsah apod.,* a tím podnítit zájem o jeho nalezení.

Poznámka: série a), b), c) jsou převzaty z učebnice matematiky (Hejný a kol., 2015, s. 26)

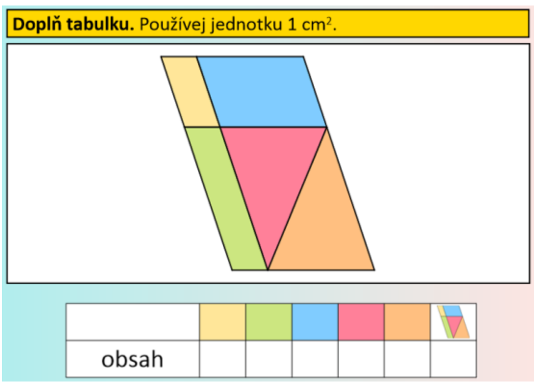
4.4.3 3. vyučovací hodina

Cíle hodiny: Žák využívá vztahů pro obsah rovnoběžníku a trojúhelníku a k výpočtu si vyhledává nezbytné parametry v nákresu, obrázku nebo modelu. Hodina slouží k upevňování poznatků.

4.4.3.1 Úloha 1 – Obsahy částí kosodélníku

Cíle aktivity: Žák by si měl upevnit vztahy pro výpočet obsahu rovnoběžníku a dále posilovat vztah mezi obsahem trojúhelníku a rovnoběžníku.

Popis aktivity: Řešení úlohy probíhá v náhodných skupinách. Každá skupina obdrží jeden obrázek rovnoběžníku. Úkolem žáků je nalézt veškeré potřebné parametry pro výpočet a doplnit tabulku. Následuje diskuse o řešeních jednotlivých skupin.

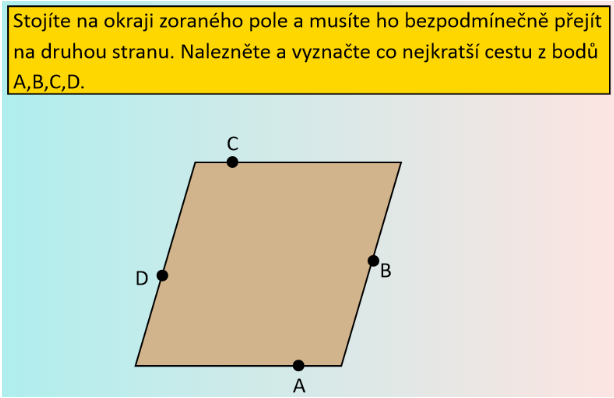


Obrázek 4.28: Zadání úlohy 1

Možné obtíže: Žáci budou mít problém s nalezením výšky útvaru a budou zaměňovat výšku za délky stran. Jako pomoc mohou mít k dispozici čtvercovou síť a útvar si vystřihnout a vložit do ní.

4.4.3.2 Úloha 2 – Cesta přes pole

Úloha byla zařazena do výuky v prvé řadě kvůli posílení významu výšky, ale zejména proto, aby si žáci uvědomili, že výška v rovnoběžníku je nejkratší vzdálenost mezi dvěma rovnoběžkami.



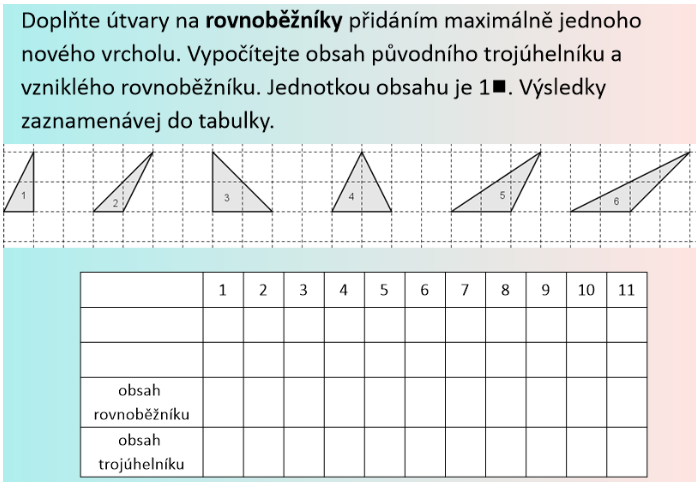
Obrázek 4.29: Zadání úlohy 2

Popis aktivity: Žáci si překreslí obrázek do sešitu a snaží se zakreslit hledanou cestu. Žáci prezentují svoje návrhy na tabuli a komentují jejich umístění. Učitel by měl v závěru položit otázku, *co mají společného všechny zakreslené cesty.* Bylo by velice užitečné, kdyby zaznělo, že cesta musí být na obě rovnoběžky kolmá.

Možné obtíže: Cesta bude zakreslována rovnoběžně s nějakou stranou.

4.4.3.3 Úloha 3 – Doplňování na rovnoběžník

Cílem této úlohy je upevnění vztahu pro výpočet obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku. Žáci by po absolvování této úlohy měli alespoň intuitivně chápat, co je to výška a k ní příslušná strana. Úloha vede nejen k dalšímu posílení vztahů mezi obsahem trojúhelníku a rovnoběžníku, ale také k podpoření myšlenky, že rovnoběžník má dvojice protilehlých stran rovnoběžné a že řešením může být stejně tak kosodélník jako obdélník, respektive kosočtverec a čtverec. Více možností doplnění útvarů, větší množství trojúhelníků a přítomnost zdánlivého modelu v podobě trojúhelníku, kde známá strana není umístěna vodorovně, poskytuje individualizaci práce a náměty k diskusi.



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
obsah rovnoběžníku											
obsah trojúhelníku											

Obrázek 4.30: Ukázka části pracovního listu k úloze 3

Popis aktivity: Každý obdrží pracovní list se sérií trojúhelníků umístěných ve čtvercové síti a s tabulkou na zaznamenání obsahu rovnoběžníku a trojúhelníku. Práce probíhá samostatně. Žáci doplňují trojúhelníky na rovnoběžníky a hledají obsahy, které zaznamenávají do tabulky. V tabulce jsou záměrně vynechány dva řádky a úkolem rychlejších žáků je objevit, které údaje obecně stačí k výpočtu obsahů, eventuálně slovy popsat nebo pomocí proměnných zapsat tento vztah a údaje doplnit. Výsledná řešení jsou prezentována před třídou na tabuli. Doplňování na rovnoběžník stačí naznačit na několika případech a není třeba kontrolovat všechny obrazce.

U jednoho obrazce by se měly objevit různé možnosti řešení a učitel by na to měl dohlédnout a ptát se, zda někdo nepracoval jiným způsobem. Na tabuli by měly figurovat všechny výsledky zaznamenané v tabulce. Důležitou závěrečnou fází úlohy je diskuse nad tabulkou, eventuálně objevení nových vztahů a také doplnění chybějících řádků tabulky.

Možné obtíže: Žáci budou přidávat více než jeden vrchol. Může také nastat situace, kdy nebude objeven vztah mezi výškou a příslušnou stranou. V tuto chvíli je důležité směrovat žáky vhodnými otázkami, aby měli nějakou „nápovědu“, případně mohou zkusit doplňovat útvary na obdélníky a zkoumat souvislost obsahu s délkami jejich stran.

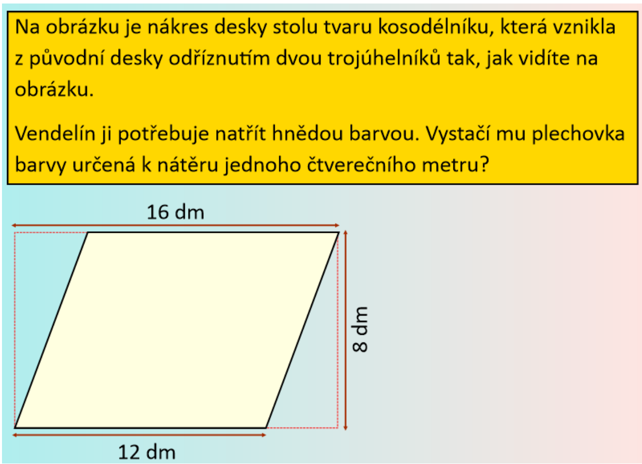
4.4.4 4. vyučovací hodina

Cíle hodiny: Žáci si upevňují generický model pro výpočet obsahu rovnoběžníků a trojúhelníků na praktických úlohách. O řešeních ve třídě diskutují.

Pomůcky: pracovní list pro aktivitu *Bermudský trojúhelník*, pracovní list na porovnávání obsahů trojúhelníků, proužky papíru široké 4 cm, nůžky.

4.4.4.1 Úloha 1 – Deska stolu

Pro řešení této úlohy již žák může využít získaného generického modelu pro výpočet obsahu rovnoběžníku. Případně i nadále může využívat komplementu útvaru, tedy nejprve vypočítat obsah obdélníku a následně od něj odečíst obsah dvou přebývajících částí, respektive si rovnoběžník rozdělit na obdélník a dva pravoúhlé trojúhelníky a pak jejich obsahy sečíst. Úloha je zaměřena na praktické využití obsahů v reálném životě.

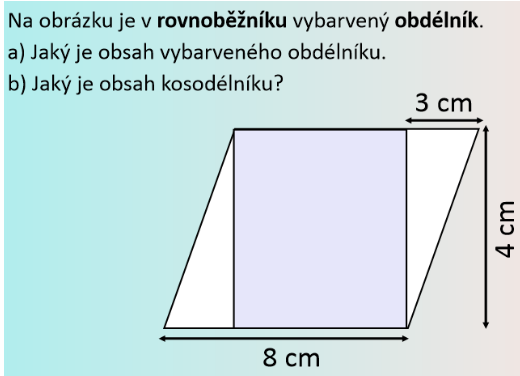


Obrázek 4.31: Zadání úlohy stůl tvaru kosodélníku

Poznámka: Pro rychlejší žáky můžeme například položit otázku, kolik procent původní desky bylo odříznuto. Důležitá je opět prezentace výpočtů u tabule doprovázená komentářem. Dá se předpokládat, že každý žák bude využívat jiného postupu.

4.4.4.2 Úloha 2 – Úloha TIMSS

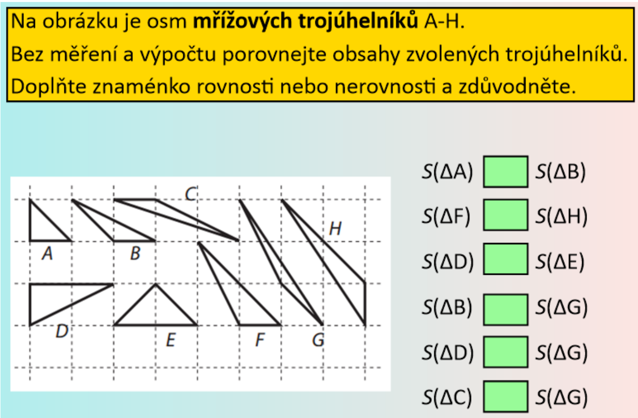
Tato úloha by zařazena do plánu výuky proto, že úspěšnost českých žáků v testování TIMSS 1999 byla pouze 46,3 %. Rozvíjí stejné dovednosti jako úloha předchozí a navíc propojuje znalosti obsahu obdélníku a kosodélníku. Úlohu jsem oproti úloze původní rozšířil ještě o úkol b). Řešení probíhá formou třídní diskuse. Opět je kladen důraz na různé způsoby řešení.



Obrázek 4.32: Úloha TIMSS, Palečková (2001)

4.4.4.3 Úloha 3 – Mřížové trojúhelníky

Úloha ve čtvercové síti a porovnávání obsahů trojúhelníků směruje žáky opět k prohlubování závislosti platící právě pro obsah trojúhelníku. Zásadní pro tuto úlohu je argumentace. Ve třídě by měly zaznít komentáře typu: „Myslím si, že tyto dva trojúhelníky mají stejné obsahy, protože oba mají shodnou délku strany a k ní příslušné výšky“ apod. Doporučil bych do obrázku údaje zakreslovat.

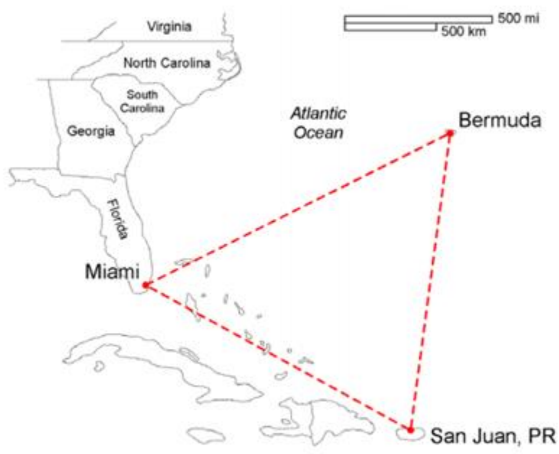


Obrázek 4.33: Zadání úlohy 3 – Hejný, Jirotková (2012)

Možné obtíže: Žáci budou rovnou počítat obsahy a budou se vyhýbat argumentaci. Úloha bude pro žáky příliš snadná, v tomto případě je možnost porovnávat i obvody útvarů.

4.4.4.4 Úloha 4 – Bermudský trojúhelník

Cílem závěrečné úlohy je ukázat, že k výpočtu trojúhelníku můžeme použít libovolnou stranu a k ní příslušnou výšku. Údaje je nutné v obrázku vyhledat, vyznačit, změřit a využít při výpočtu. Navíc je úloha motivována záhadou Bermudského trojúhelníku a propojuje oblast matematiky a geografie (zejména práci s měřítkem). Žáci se setkávají i s jednotkou míle.



Obrázek 4.34: Úloha Bermudský trojúhelník

Popis aktivity: Učitel aktivitu uvede otázkou, zda někdy někdo slyšel o záhadě Bermudského trojúhelníku, a čeká na odpovědi žáků. Krátká diskuse na začátku slouží jako motivační prvek. Následně je puštěna první minuta dokumentu o záhadě Bermudského trojúhelníku na odkazu https://www.youtube.com/watch?v=jMpdfBFiI20. Po skončení učitel položí otázku: „V jak velké oblasti tedy na námořníky čeká nebezpečí?“

Žáci jsou vyzváni, aby se rozdělili do skupin po třech, vzali si lísteček s obrázkem (viz obrázek 4.34) a úlohu vyřešili ve skupině na papír. Rozhodně by měl učitel přijmout jak řešení v mílích, tak v kilometrech. Závěrem by se měly výsledky skupin prezentovat u tabule.

Možné obtíže: Žáci nenaleznou příslušné výšky a nebudou obsah umět najít. V takovém případě se úloha může zjednodušit na hledání obsahu trojúhelníku na obrázku bez přepočtu, například vložením trojúhelníku do čtvercové sítě. Je také velmi pravděpodobné, že žáci budou mít problém s měřítkem. Vyplatí si, aby si též eventuálně nejprve vyzkoušeli spočítat obsah trojúhelníku na obrázku.

4.5 Rámcový popis proběhlé výuky

Následující tabulka stručně zachycuje průběh experimentální výuky realizované v termínu 1. 6.– – 14. 6. 2016. V každé třídě bylo odučeno 6 hodin, hodina bezprostředně následující byla v každé třídě věnována závěrečnému hodnocení. Čísla jednotlivých aktivit v tabulce odkazují na předchozí podkapitolu. Celou experimentální výuku předcházely hodiny věnované tématu shodnosti útvarů a zejména větám o shodnosti trojúhelníků.

Tabulka 4.1: Popis průběhu experimentální výuky

	7. C				**7. B**			
Pořadí hodiny	**Datum**	**Hodina v rámci dne**	**Téma; aktivity/úlohy**	**Počet žáků**	**Datum**	**Hodina v rámci dne**	**Téma; aktivity/úlohy**	**Počet žáků**
1	1.6.	3	**Vlastnosti rovnoběžníků**; 4.4.1.1 (manipulace, diskuse) + příprava aktivity; 4.4.1.2	23	2.6.	4	**Vlastnosti rovnoběžníků;** 4.4.1.1 (manipulace, diskuse)	21
2	2.6.	1	**Obsah trojúhelníků ve čtvercové síti**; 4.4.1.2 (manipulace, skup. práce); 4.4.2.1 (manipulace, skup. práce)	24	3.6.	1	**Obsah trojúhelníků ve čtvercové síti**; Obsah trojúhelníků ve čtvercové síti; 4.4.1.2 (manipulace, skup. práce)	21

3	3.6.	3	**Vztah mezi kosodélníkem a obdélníkem;** 4.4.2.1 (manipulace, skup. práce) – doplnění; 4.4.2.2 (manipulace, skup. práce	23	7.6.	2	**Vztah mezi kosodélníkem a obdélníkem;** 4.4.2.1 (manipulace, skup. práce); 4.4.2.2 (manipulace, skup. práce) – pouze útvary 1 a 2	20
4	6.6.	2	**Odhalování vztahu pro obsah trojúhelníku s pomocí čtvercové sítě;** 4.4.2.3 (samostatná práce, diskuse) – první část pracovního listu	24	8.6.	2	**Odhalování vztahu pro obsah trojúhelníku s pomocí čtvercové sítě;** 4.4.2.3 (samostatná práce, diskuse) – první část pracovního listu	20
5	8.6.	1	**Odhalování vztahu pro obsah rovnoběžníku;** 4.4.2.3 (samostatná práce, diskuse) – druhá část pracovního listu; 4.4.3.3 (samostatná práce, diskuse); 4.4.4.1 (diskuse)	25	9.6.	4	**Odhalování vztahu pro obsah rovnoběžníku;** 4.4.2.3 samostatná práce, diskuse) – druhá část pracovního listu; 4.4.3.3 (samostatná práce, diskuse)	16
6	10.6.	3	**Procvičení vztahu pro obsah trojúhelníku a rovnoběžníku;** 4.4.4.2; 4.4.3.1; 4.4.4.3 (samostatná práce, diskuse); 4.4.4.4 (skup. práce, diskuse)	25	10.6.	1	**Procvičení vztahu pro obsah trojúhelníku a rovnoběžníku;** 4.4.4.1; 4.4.4.2; 4.4.3.1; 4.4.4.3; (samostatná práce, diskuse)	20
7	14.6.	3	Post-test	24	14.6.	2	Post-test	21

V průběhu výuky žáci nevyužívali žádnou učebnici ani pracovní sešit. Všechny materiály byly rozdávány přímo v hodinách, většinou se jednalo o pracovní listy nebo papírové modely obrazců. Žákům stačily k práci běžné rýsovací potřeby a nůžky.

4.6 Průběh výuky

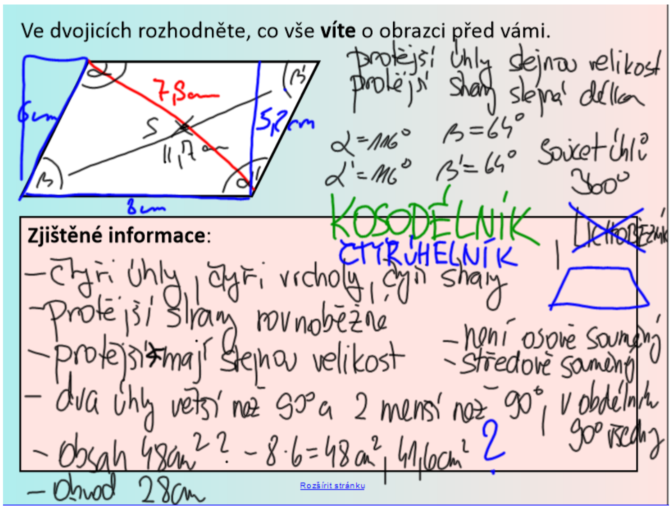
Terminologii pro popis průběhu výuky budu čerpat zejména z kapitoly 2.2, zaměřené na žákův pojmotvorný proces, a dále z kapitoly 2.3.2, věnované oblasti míry v geometrii. Průběh experimentu bude strukturován dle důležitých milníků v poznávacím procesu a souběžně popisován z hlediska Hejného teorie generických modelů zobrazené v tabulce 2.1. Jednotlivé etapy budou dokladovány konkrétními situacemi z výuky a eventuálně jejich přepisem. Žáci v těchto přepisech budou vystupovat pod pseudonymem. Vzhledem k velkému množství situací budou vybírány zejména ty situace, které přímo souvisí s tématem diplomové práce, tedy s obsahem rovnoběžníku a trojúhelníku. Na závěr zhodnotím výuku z hlediska principů podnětné výuky představených v oddíle 2.1 a navrhnu několik změn v plánu výuky. Součástí vyhodnocení budou i výsledky post-testu.

Výuka v 7. C začala dříve, proto začnu popis nejdříve touto třídou.

4.6.1 Motivace formou manipulace

4.6.1.1 7. C

Výuku jsem v této třídě zahájil motivační aktivitou (4.4.1.1) zaměřenou na poznávání vlastností rovnoběžníku, respektive kosodélníku manipulativní formou. Práce ve dvojicích původně plánovaná na 10 minut se protáhla na 30 minut, ale výstupy a poznatky z ní jsem v daný okamžik považoval za natolik důležité, že jsem aktivitu neukončoval, jak jsem měl v plánu. Žáci svoje získané poznatky komentovali u tabule a též kreslili do obrázku. Za úspěch považuji zejména to, že každá skupina prezentovala alespoň jednu vlastnost.

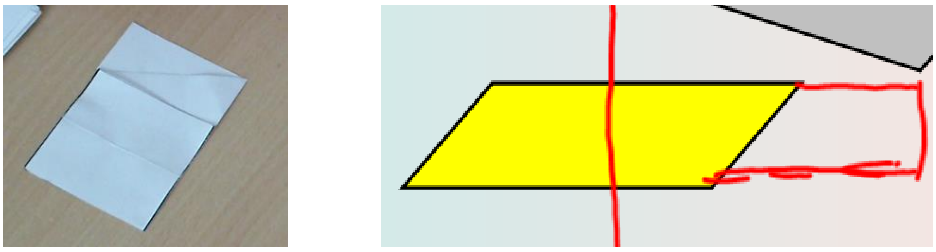


Obrázek 4.35: Výstupy z motivační aktivity v 7. C

Jak je vidět na obrázku 4.35, žáci přišli nejen na obvod, ale i na vlastnosti platící o délkách stran, ale také o vnitřních úhlech a jejich součtu, útvar navíc pojmenovali. Jak je vidět, na tabuli se vyskytlo i chybné pojmenování lichoběžník. Na moji závěrečnou výzvu, ať třída zkontroluje všechny zapsané informace, se ozval žák Filip a řekl, že útvar na tabuli není lichoběžník, a chybu správně opravil nakreslením lichoběžníku na tabuli.

Za nejdůležitější moment z hlediska tématu práce považuji nečekaný návrh Dominika, který přišel s myšlenkou, že obsah kosodélníku, který má před sebou, je 48 cm^2. Na moji otázku, zda by nám tento výsledek mohl nějak okomentovat, odpověděl: „No protože šest krát osum je čtyřicetosum.“ Na situaci jsem nijak nereagoval a zapsal výsledek na tabuli, aktivita dále pokračovala a za chvíli Dominik přišel s druhou myšlenkou, že obsah kosodélníku je tentokrát 41,6 cm^2. Pozval jsem ho k tabuli a on sdělil: „Tak tedy vynásobím tohle tímto.“, a správně zaznačil do obrázku stranu a příslušnou výšku (pojem výška zatím v té chvíli nebyl explicitně zmíněn). Navíc předvedl, že z jedné strany může odříznout pravoúhlý trojúhelník a přidat ho na druhou stranu (správné řešení). Jeho výsledek jsem tedy také zapsal na tabuli a sdělil zároveň třídě, že by bylo dobré, aby na tabuli byly pouze správné výsledky, a že bych měl oba nebo jeden škrtnout. Na výzvu se ozval Michal, který by škrtl 48 na základě Dominikova návrhu, načež se na to ozval Dominik: „Já bych raději škrtl všechno.“ Cítil jsem, že ještě není správná chvíle na vyzrazení generického modelu, tak jsem u výsledku nakreslil otazník a dodal, že možná tedy v průběhu hodiny zjistíme, který výsledek je správný, a proto jsem ani jeden z výsledků nepotvrdil. Aniž by to ovšem žáci věděli, jednalo se o první izolovaný model obsahu rovnoběžníku.

Zkoumání vlastností rovnoběžníku dále pokračovalo stříháním rovnoběžníku využitého v předchozí aktivitě a přetvářením na obdélník pomocí jednoho střihu.



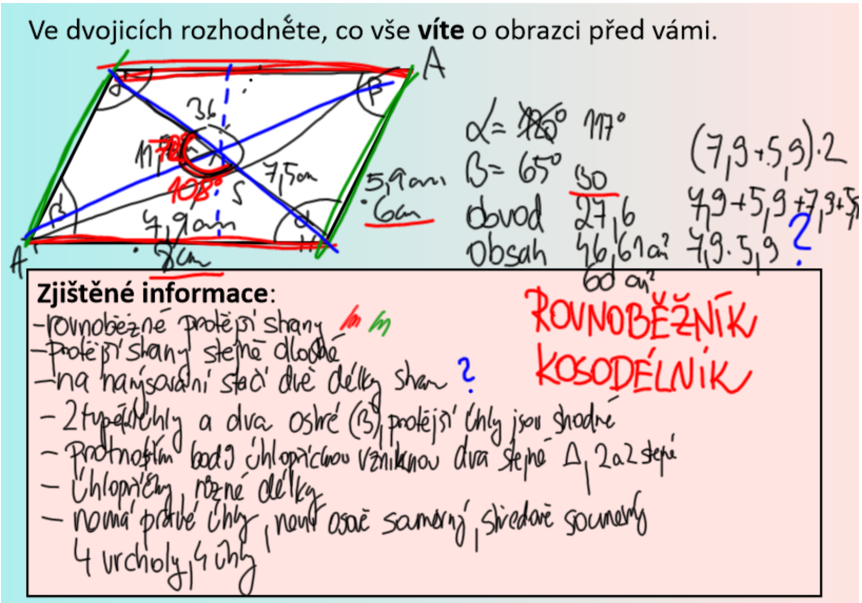
Obrázek 4.36: Dvě navržené metody střihu v 7. C

Ukázalo se, že zadání nebylo jednoznačné, protože žáci začali útvar různě přehýbat a jeden střih prováděli například ve dvou vrstvách. Tato nejednoznačnost však nebyla na škodu, někteří tím nevědomky prozkoumali důležité vlastnosti rovnoběžníku využitelné při hledání jeho obsahu, a navíc tato forma zadání otevřela cestu mnoha různým nečekaným řešením. Svým charakterem byla aktivita motivační, protože pracovali všichni bez rozdílu, nemalý počet žáků pracoval dokonce i na výzvě, která spočívala v rozstřižení libovolného obdélníku tak, aby se dal přetvořit na kosočtverec. Jeden žák mi dokonce po hodině přinesl vyřešenou výzvu ukázat.

Závěrem bych ještě dodal, že v pohospitačním formuláři hodiny vyplněným přítomnou paní učitelkou se objevil komentář: „velké + byla manipulace, viditelná snaha žáků nalézt řešení.“

4.6.1.2 7. B

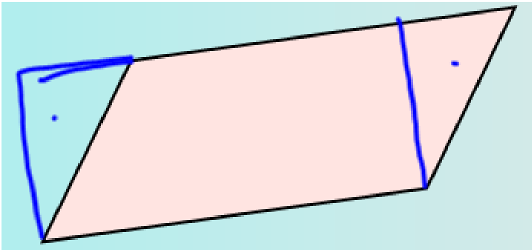
Motivační aktivitu (4.4.1.1) jsem zadal i v druhé třídě. V 7. B byl průběh podobný, jak je vidět na obrázku 4.37. Na tabuli ovšem i po několika upozorněních zůstaly chybné velikosti úhlů. Součet α + β by měl být v rovnoběžníku roven 180°. Vzhledem k času jsem na tuto chybu neupozorňoval. Další chybnou informací bylo, že k narýsování rovnoběžníku nám stačí pouze dvě délky stran, také jsem na chybu neupozorňoval vzhledem k tomu, že konstrukce rovnoběžníku měla následovat ihned po výuce obsahu, a plánoval jsem tedy se k tvrzení vrátit a s pomocí žáků ho vyvrátit.



Obrázek 4.37: Výstupy z motivační aktivity v 7. B

Stejně jako v 7. C zazněla myšlenka z úst Ondry, že obsah kosodélníku bude „strana krát strana“. Vzhledem k nízké podpoře spolužáků jsem též u tohoto postupu udělal otazník a dodal, že uvidíme v průběhu hodin, zda je výsledek správný, nebo ne. Myslím, že i v případě 7. B splnila úloha roli motivace, protože každá dvojice nebo skupina přednesla nějakou myšlenku a následně, když jsem nabídl, že se může hlásit kdokoliv, přicházeli žáci s dalšími myšlenkami.

I v této třídě se podařilo v rámci druhé části úvodní aktivity přetváření rovnoběžníku na obdélník najít více způsobů řešení, došlo totiž i zde k odlišnému vnímání zadání, žáci začali útvar přehýbat a následně stříhat ve vrstvách. V této třídě se nestihla v rámci hodiny výzva s kosodélníkem, protože manipulace zabrala poměrně velké množství času a velice dlouho trvalo, než se objevilo alespoň jedno řešení.



Obrázek 4.38: Návrh přetvoření obdélníku

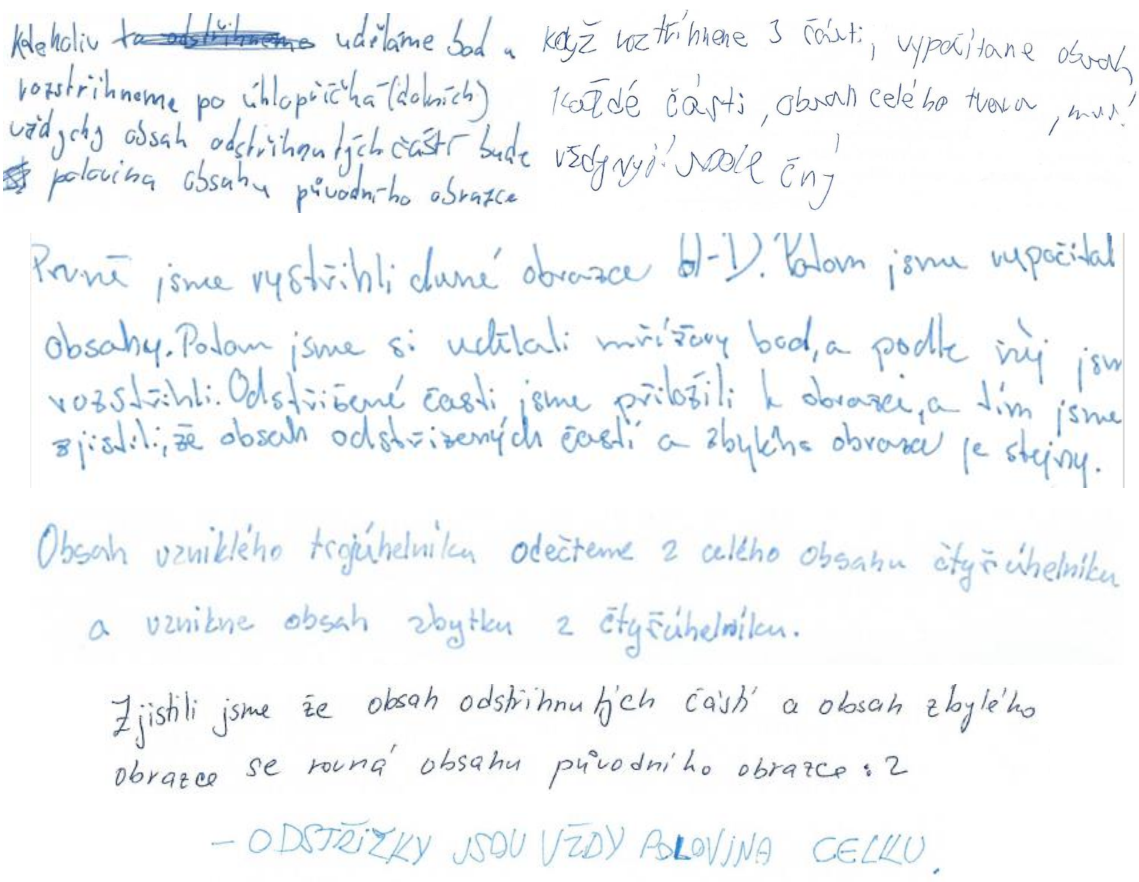
4.6.2 Izolované modely ve čtvercové síti a mimo ni

Jak již bylo několikrát řečeno, jednou z nejdůležitějších hladin pojmotvorného procesu jsou právě izolované modely, mezi nimiž žák důkladným studiem objevuje nové souvislosti a vztahy a tvoří z nich celky se stejnými vlastnostmi. I proto byla výuka koncipována tak, aby žáci měli možnost získat dostatečné množství těchto modelů, a navíc byl kladen důraz na to, aby nepoznávali obsah trojúhelníku a rovnoběžníku zvlášť, ale v souvislostech. Procesu velice pomohlo, že hned v prvních hodinách u obou tříd zaznělo, že úhlopříčka dělí rovnoběžník na dva shodné trojúhelníky. Jak ale teď ukáži, fáze izolovaných modelů byla diametrálně odlišná. Zatímco v 7. C jsem nemusel žádným způsobem napovídat a žáci objevili zárodky generického modelu už v 1. hodině a následně ve 3. hodině, v 7. B jsem žáky musel více směrovat a dávat jim nápovědy.

Největším zdrojem izolovaných modelů obsahů trojúhelníku byla v první řadě aktivita s vystřihováním trojúhelníků (4.4.1.2), sloužící navíc k propojení s obsahem obdélníku, dále skládačka (4.4.2.2), která sloužila k propojení nejen s obsahem obdélníku, ale i s obsahem kosodélníku. Závěrem se jednalo o úlohu o výpočtu obsahů rozličných útvarů ve čtvercové síti (4.4.2.3), využívající myšlenky komplementu a zároveň budující představu o výšce trojúhelníku.

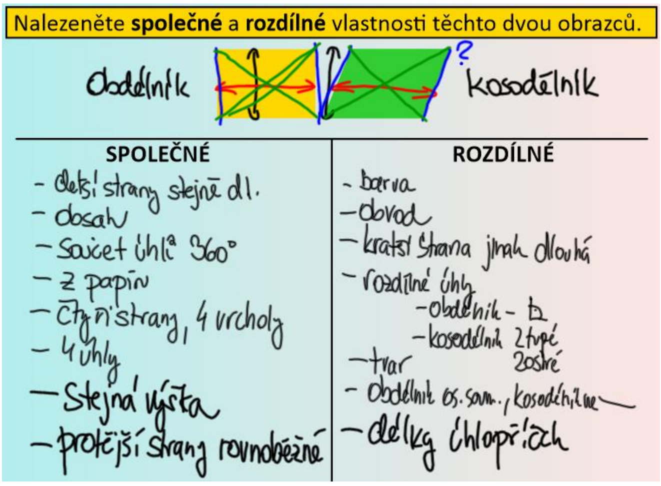
4.6.2.1 Třída 7. C

Při seznamování s izolovanými modely obsahů v rámci skupinové (maximálně 3 osoby ve skupině) manipulativní práce (4.4.1.2) a na základě vyplněné tabulky v pracovním listu (obrázek 4.23) žáci ve skupinách dospěli k několika důležitým myšlenkám napomáhajícím objevení generického modelu a propojujícím izolované modely mezi sebou. Jednalo se o zamýšlený vztah mezi obsahy obdélníku a trojúhelníku (viz následující obrázky). Ve všech komentářích je vidět, že skupiny dospěly přesně k tomu, co bylo v přípravě hodiny zamýšleno. Všem skupinám se podařilo nalézt správné řešení. Skupinám, které pracovaly rychleji, jsem navíc zadal úkol skládat z rozstříhaných dílků rovnoběžníky, žáci tedy mohli přicházet na to, že kosodélník s obdélníkem mají stejné obsahy, jestliže mají stejné délky jedné strany a k ní příslušné výšky, respektive druhé strany v případě obdélníku.



Obrázek 4.39: Výstupy ze skupinové aktivity 4.4.1.2 v 7. C

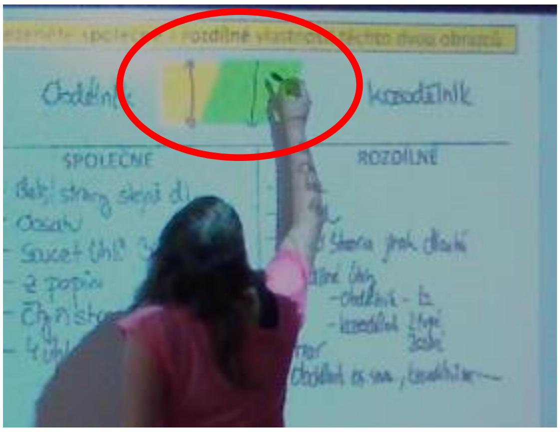
Ihned po skončení této aktivity v rámci hodiny následovala další manipulativní činnost (4.4.2.1), opět formou skupinové práce. Žáci zjišťovali společné a rozdílné vlastnosti obdélníku a kosodélníku. Jakožto učitel jsem hrál při této aktivitě pouze roli zapisovatele. Důležitým výstupem bylo tvrzení, že útvary mají stejný obsah, a zároveň poprvé zcela spontánně během výuky zazněl pojem výška.



Obrázek 4.40: Společné a rozdílné vlastnosti kosodélníku a obdélníku získané v 7. C v rámci aktivity 4.4.2.1

Nyní popíšu velice důležitou situaci, která vznikla, když žákyně Eliška v průběhu prezentace výsledků prohlásila, že útvary mají stejný obsah. Ze třídy se ozvalo, že tomu tak není, a vznikla hádka „maj“ vs. „nemaj“, kterou jsem musel po pár vteřinách usměrnit otázkou, zda je tedy ve třídě někdo schopen vysvětlit, proč mají, či nemají stejný obsah. Dal jsem možnost Elišce objasnit její tvrzení před třídou a ukázat ho na modelech. Eliška si vzala oba útvary do ruky a předváděla na nich svoje tvrzení: „Když vlastně ty dvě stejný strany dáme k sobě, tak vidíme, že tady vlastně jsou… zbylý trojúhelníky a na druhý straně je zelenej, a kdybychom to odstřihli a dali to tam, kde to není vyplněný, tak to je stejnej obsah.“ Eliška dva útvary dala na sebe a odstřihnutím přebývajícího pravoúhlého trojúhelníku by rozstřižený rovnoběžník doplnila na obdélník se stejným obsahem. Zde byla opět vidět myšlenka využití komplementu, která byla pro třídu natolik očividná, že Eliščino vysvětlení přijala.

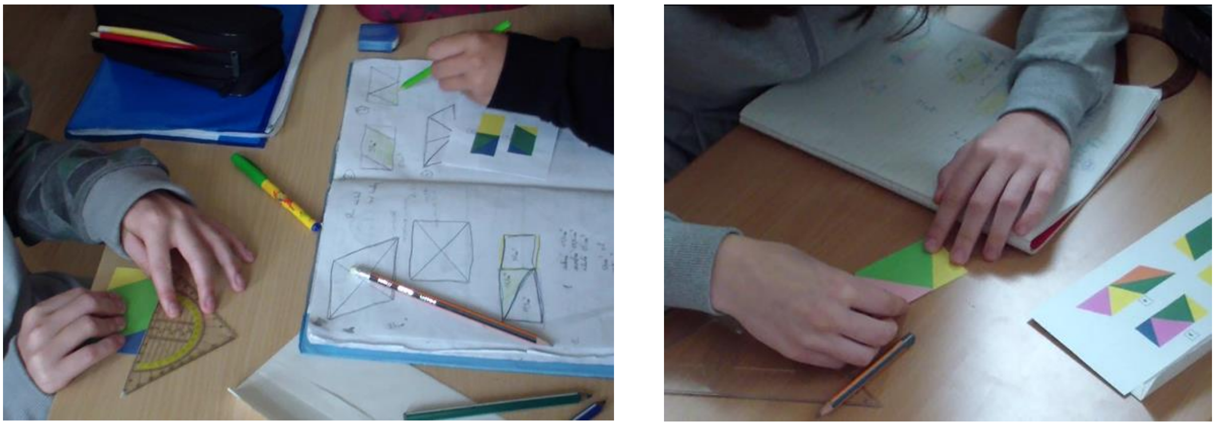
Následující hodinu jsem na tabuli vlastnosti promítl a zeptal jsem se, zda nepřišli na nějakou společnou vlastnost. Ozvala se opět Eliška a přišla s tvrzením, že oba útvary mají stejnou výšku. Ihned šla sama k tabuli a dva útvary přes sebe překryla a zakreslila, co tím myslí (viz obrázek 4.41).



Obrázek 4.41: Žákyně argumentuje a vyznačuje, co myslí slovem výška

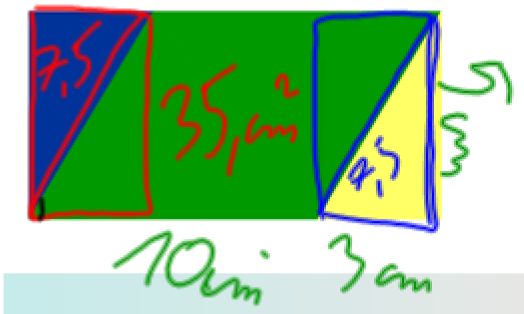
Tato úloha přinesla ještě jedno překvapivé tvrzení související se známým Cavalieriho principem sloužícím primárně k určování objemu těles. Tvrzení se ale nesetkalo s úspěchem a pochopením. Kuba přišel k tabuli a červenou čarou vyznačil v útvarech dvě vzdálenosti (viz obrázek 4.40) a tvrdil o nich, že jsou stejné. Třída odpověděla, že to je stejné jako délka strany a že už to tam je napsané. Kuba s tím nesouhlasil a odešel se posadit do lavice. Tvrzení se snažila ještě zachránit Kačka a řekla, že vzdálenost mezi dvěma stranami je stále stejná (myšleno ve významu rovnoběžná vzdálenost). I tak to třídě nepřišlo nijak zajímavé. Opět mě překvapilo, kolik relevantních a důležitých informací dokázala třída nashromáždit.

Podstatnou aktivitou, kde se objevil další náznak generického modelu, byla „skládačka“ (4.4.2.2), opět se jednalo o aktivitu ve skupinách, u které fakticky k úspěšnému řešení stačilo umět spočítat obsah obdélníku a všímat si společných vlastností formou překrývání. Znovu se ukázalo, že skupinová práce je silným nástrojem a vzniká při ní spousta důležitých myšlenek, stejně tak jako u manipulativní činnosti.



Obrázek 4.42: Ukázky práce dvou skupin v 7. C

Většině žáků se podařilo odhalit spojitost mezi jednotlivými útvary ve skládačce, a zároveň již někteří byli schopni tyto myšlenky aplikovat při hledání obsahů viditelných částí. Předvedu to na ukázce výpočtu obsahů v útvaru, který je na obrázku 4.43.



Obrázek 4.43: Mirčino řešení

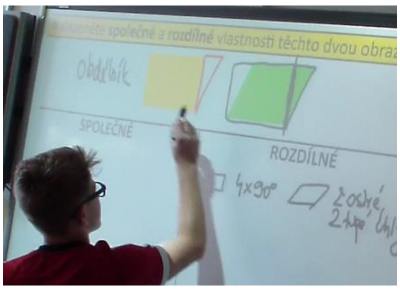
Na prezentaci řešení útvaru na obrázku 4.43 se přihlásila žákyně Mirka, která postupovala následovně. Nejprve si doplnila údaje 10 cm, 3 cm a 5 cm. Poté dokreslila do obrázku modrý obdélník rozdělený úhlopříčkou. Následně komentovala, jak získala obsah žluté části: „tři krát pět je patnáct, děleno dvěma je sedm a půl“ pak dokreslila červený obdélník a sdělila: „tohle je to samý,“ což byl obsah modré části. Souběžně doplnila hodnotu 7,5 do modrého trojúhelníku a v závěru prohlásila: „no a obsah tohohle (myšleno zelenou část) bude stejný jako obsah toho obdélníku předtím (Mirka na obdélník zároveň ukazuje na tabuli).“ Podobných vlastností jako Mirka využívali i někteří další žáci u určování zbývajících obsahů. Zde je opět vidět účinnost myšlenky komplementu. Bylo vidět, že objevení generického modelu je „na spadnutí“.

4.6.2.2 Třída 7. B

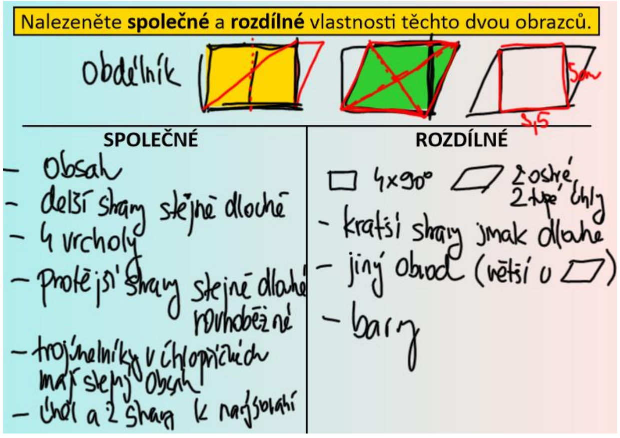
V 7. B trvalo podstatně déle, než se objevily první náznaky generického modelu, bylo tedy důležité dát ke studiu velké množství izolovaných modelů. Stejně jako v 7. C následovala po motivační aktivitě skupinová práce 4.4.1.2, při níž se ukázalo, že u některých skupin je základní problém již v počítání obsahů čtverců a obdélníků. Ze třídy se několikrát ozvalo: „obdélník to je *a* krát *b*." Jedna skupina se mě dokonce zeptala: „Pane učiteli, obsah trojúhelníku je *a* krát *b* krát *c*?" Já jsem na to zareagoval tak, že jsem jim řekl: „Začněte tím, kolik má obsah jeden čtvereček." Skupině to poté došlo a žáci začali počítat čtverečky a jejich části v obrazci. Ze začátku byla ve skupinách vidět silná vazba na vzorce. Postupně od nich skupiny ustupovaly.

Při následné prezentaci výsledků se ale ukázalo, že postupně ke správným výsledkům došly všechny skupiny. V průběhu prezentace výsledku zaznělo několik důležitých myšlenek. Nejprve, že z prvního měření se žáci dozvěděli, že obsah trojúhelníku je polovina obsahu čtverce. Dalším zjištěním bylo, že pro všechny obrazce platilo, že obsah původního obrazce a obsah odstřihnutých částí jsou si rovny, respektive, že vzniklý trojúhelník tvoří vždy polovinu původního obdélníku. Žákem Honzou bylo názorně předvedeno, že pokud vezme odstřihnuté části a přiloží je k původnímu trojúhelníku, tak se překrývají. I přestože práce trvala podstatně déle, než jsem plánoval, a zabrala celou vyučovací hodinu, cíl aktivity byl splněn. Obecně bych ale dodal, že většina skupin měla problém už se čtením zadání, což mnohdy znamenalo, že jsem musel zasáhnout a donutit je přečíst celé zadání znovu a ve skupině.

Následující hodinu jsem navázal aktivitou hledání společných a rozdílných vlastností kosodélníku a obdélníku. Ukázalo se, že žáci skutečně odvedli práci a stejně jako v 7. C se jim podařilo odhalit poměrně velké množství vlastností včetně té informace, že oba útvary mají stejný obsah. Tuto myšlenku přednesl, podobně jako v 7. C Eliška, Honza. Vzal si do ruky modely a řekl: „Když si je dáme k sobě touhle stranou, vlastně to, co nám tady přebývá, doplňuje to, co tady chybí." Svoji myšlenku na mé požádání šel Honza předvést na tabuli. Podobně vysvětlil Honzovu myšlenku i Petr, který odkázal na motivační aktivitu se stříháním a u tabule naznačil čarou, kde by kosodélník přestřihnul a kam by umístil odstřiženou část.



Obrázek 4.44: Petr vysvětluje u tabule svůj postup



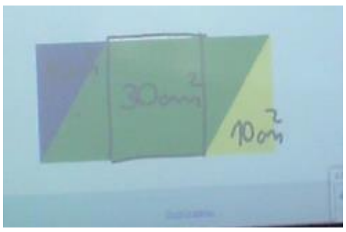
Obrázek 4.45: Společné a rozdílné vlastnosti kosodélníku a obdélníku získané v 7. B v rámci aktivity 4.4.2.1

Na obrázku 4.45 je vidět výstup práce 7. B. Za zmínku stojí tvrzení, že „trojúhelníky v úhlopříčkách mají stejný obsah“, čímž bylo myšleno, že pokud rozdělíme oba útvary úhlopříčkou, tak všechny vzniklé trojúhelníky budou mít stejný obsah. V rámci této aktivity nezazněl v žádné souvislosti pojem výška.

Následovala aktivita „skládačka“ (4.4.2.2), u které jsem vzhledem k času pozměnil zadání. Žáci měli ve skupinách primárně tvary složit, poté načrtnout a pak až teprve počítat. Cílem tedy bylo v rámci této aktivity propojit zejména vztahy mezi obrazci. Překvapilo mě velice pozitivně, že kromě dvou skupin se všem ostatním podařilo naleznout obsahy alespoň u prvních dvou obrazců.

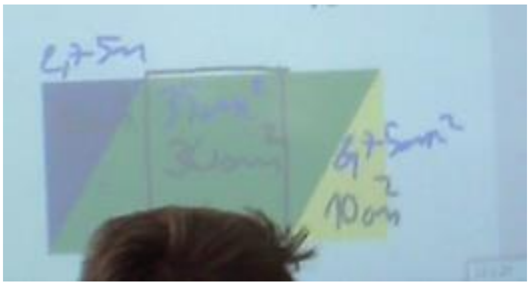
Obrázek 4.46: Průběh skupinové práce v 7. B

První útvar problémy nečinil, u útvaru číslo 2 již problém nastal. Nejprve se přihlásil k řešení Petr a zapsal hodnoty, které ukazuje obrázek 4.47. Je z nich patrné, že řešení nejsou správná. V tomto případě měl činit obsah žluté části 35 cm^2 a obsah každé zbývající 7,5 cm^2.



Obrázek 4.47: Petrovo řešení

Ihned se přihlásil Honza a tvrdil, že má jiné řešení. „Těch 30, to je špatné. Musí to mít stejný obsah, jako to žluté (správně odkazuje na žlutý obdélník, který žáci zkoumali v předešlé aktivitě), takže 30 ne, je to 35. No a ten zbytek, to jsme dělali v předchozí hodině, že si to prostě jako rozdělíme z toho vrcholu a pak je to jakoby polovina, takže tady by mělo být 8,75 a tam taky.“ V tuto chvíli je vidět, že Honza rozumí principu a správně i u tabule postup ukazuje. Nicméně evidentně počítal se špatně naměřenými údaji.

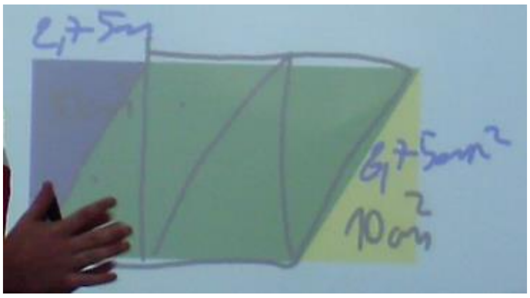


Obrázek 4.48: Honzovo řešení

Na Honzu opět navázal Petr a tvrdil, že měření nebylo úplně přesné, a naznačil, že jeho skupina zaokrouhlovala. Nicméně i s přihlédnutím k tomuto faktu nebylo řešení stále správné. Oslovil jsem tedy jinou skupinu, zda mají výsledek. Reagovala žákyně Naty, která řekla, že její skupina se nedopočítala, ale že si myslí, že modrá a žlutá část by měly mít stejný obsah. (Jak je vidět na obrázku 4.48, tak se opravdu obsahy liší, Honza ale při zapisování říkal slovně, že obsah by měl být 8,75.) Do situace opět zasáhl Honza a řekl: „Já bych možná věděl, jak zkontrolovat ten modrej. Jako v minulý hodině jsme si ty vrcholy spojili a pak se zjistilo, jaká je ta vzdálenost z vrchu.“ Vyzval jsem Honzu, aby šel nakreslit obrázek, co svým tvrzením myslí, a ten využil první obrázek a dokreslil do něj trojúhelník, jak je vidět na obrázku 4.49.

Obrázek 4.49: Honza navrhuje další způsob

Po nakreslení trojúhelníku Honza ukázal na hledanou část a řekl: „No a tahle část, ta by měla bejt, no ja nevím…“ a šel se posadit do lavice. Následoval opět Petr, který řekl, že už ví, jak to udělat. Šel k tabuli a rozdělil útvar přesně tak, jak je vidět na obrázku 4.50.



Obrázek 4.50: Petrovo nesprávné řešení

Petr dále navrhl, že obsah jedné části je 35 : 4, tedy i obsah modré části je 8,75. Třída stále nebyla přesvědčena o správnosti řešení a do toho začalo zvonit. Řekl jsem tedy, že tvrzení potvrdíme či vyvrátíme na začátku následující hodiny. K mému překvapení to ovšem skupinku kluků neodradilo, aby nad věcí přemýšleli, společně se svačinou a kalkulačkou v mobilu se jich sešlo u tabule osm. Rozpracované řešení jsem nechal záměrně na tabuli.

Obrázek 4.51: Skupinka osmi žáků řeší o přestávce nedořešenou úlohu

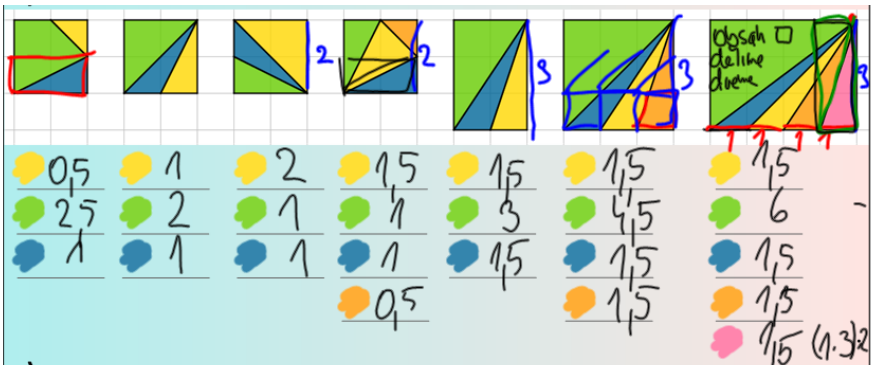
Nejprve mi navrhli řešení 5,8, tak jsem jim položil otázku, zda jsou skutečně všechny trojúhelníky, které si dokreslili na tabuli, shodné. Honza si vybral jeden z trojúhelníků, tvar si „naklonoval“ a vyplňoval obrazcem obdélník. Po chvíli uznal, že předpoklad byl mylný, když viděl, že trojúhelníky nevyplní celý prostor. Někteří chlapci již odešli a u tabule zůstal Petr s Honzou. Po několika neúspěšných pokusech jsem jim navrhl, zda se nechtějí vrátit k úplně prvnímu obrázku 4.47, který nakreslil na tabuli Petr. V tu chvíli se Honza chytil a radostně zvolal: „Tohle je tři, tohle je pět, tři krát pět je patnáct a tohle je polovina, takže sedm a půl.“ a Petr nakonec dodal: „No joo.“ Na této ukázce je vidět, jak silná může být motivace úlohou samotnou. Také se ukázalo, že žáci skutečně úlohu aktivně řešili a věnovali jí svoji přestávku. Navíc, i když celá skupina nedošla ke správnému řešení, samotná aktivní práce a přemýšlení nad úlohou pomohlo podrobněji prozkoumat útvary samotné.

K úloze jsem se vrátil na začátku další hodiny a nechal Honzu před třídou myšlenku vysvětlit. Zároveň jsem ještě zbytek třídy vyzval, aby eventuálně prozradili, zda nezjistili něco i o zbývajících útvarech z minulé hodiny. Adéla řekla, že ví něco o útvaru číslo 4.

Obrázek 4.52: Útvar 4 z úlohy skládačka

Prohlásila, že každá část má stejný obsah, a že každý rovnoběžník je rozdělen napůl, akorát jiným způsobem. Honza ještě dodal, že obsah každé té části je 17,5 cm^2. Tento útvar je z hlediska TGM ukázkou překvapivého modelu. Obsahy na první pohled nevypadají shodně.

V rámci 4. hodiny následovala aktivita 4.4.2.3, která měla žáky přivést na generický model obsahu. Stejně jako u 7. C se žáci ponořili do výpočtů a 20 minut bylo ve třídě naprosté ticho. Přešli jsme k prezentaci výsledků, v jejímž průběhu některým žákům došlo, že obsah trojúhelníku má spojitost s délkou strany a výškou.



Obrázek 4.53: Výsledky úlohy a náznak výšky

Nejprve Adéla na šestém obdélníku zleva na obrázku 4.53 vysvětlila, jak došla k výsledkům: „Víme, že obsah je devět, polovina z toho je čtyři a půl. To je to zelený a ta druhá se dělí na tři části tedy čtyři a půl děleno třema.“ Adéle jsem položil otázku, jak víme, že ty tři části jsou stejné. Adéla vysvětlila výsledky přes čtverečky, ale ne zcela přesvědčivě.

Do diskuse se vložil Ondra, který tvrdil, že trojúhelníky mají dole společný čtvereček. Navíc vystoupila Naty a řekla, že obsah vždy dělíme dvěma. K tabuli přišla opět Adéla a již správně u posledního obdélníku zakreslila, že všechny trojúhelníky mají dolní stranu délky 1. Pokračoval jsem dále dotazováním, co mají navíc trojúhelníky společného. Naty se přihlásila a tvrdila, že všechny mají společný vrchol. Ondra prohlásil: „Tam, kde je to jedna, tak to byl čtverec dva na dva a u toho obdélníku je to čtyři a tři do vejšky.“ Zároveň výšky vyznačil do obrázku a já k nim dopsal pro přehlednost číselné hodnoty. V této situaci jsem cítil, že někteří žáci pomalu začínají pronikat do podstaty věci, a proto jsem se je snažil směrovat a držet u myšlenky.

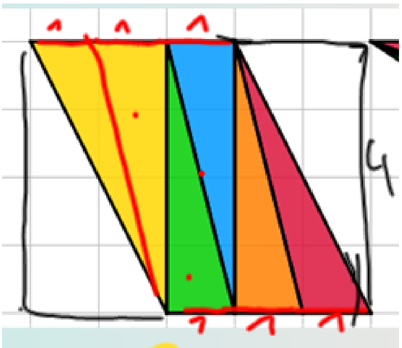
Proto, aby nezanikly náměty z diskuse, zapsal jsem je pro jistotu na tabuli. Objevilo se tam tedy, dle mě velice důležité slovo „polovina,“ dále spojení „stejná strana“ a také „obsah obdélníku děleno dvěma“. Zejména v posledním tvrzení, jehož autorkou byla Naty, je vidět zárodek procesuálního generického modelu a myšlenky půlení a vztahu rovnoběžník – trojúhelník. Proč tvrdím, že jen zárodek? V následující části hodiny již byla na tabuli délka strany, příslušná výška a obsah, stačilo už pouze vymyslet, jak tyto hodnoty propojit. Bohužel na moji otázku, jak by se dala využít výška a strana k výpočtu obsahu trojúhelníku, se mi nedostala žádné odpovědi. Rozhodl jsem se, že raději „směrování“ (*focusing pattern*) zastavím, protože jsem měl pocit, že se již dostávám spíše k „trychtýřování“ (*funneling pattern*), tento jev jsem podrobněji popsal v oddíle 2.1. Raději jsem tedy od svého plánu vyvodit generický model ustoupil a nechal jsem žáky řešit jejich způsobem obsahy zbývajících útvarů na pracovním listu. Tato situace výstižně ukázala, že pokud žáci nemají izolované modely dostatečně prozkoumané a propojené, generický model se objevuje velice těžko.

I následující hodinu jsem se pokusil vrátit k sérii úloh ve čtvercové síti, a navázat tak na hodinu předcházející. Jedním z důležitých momentů zde byla myšlenka žáka Milana. Po položení otázky, zda někdo nenašel nějaký efektivní způsob, jak obsahy řešit, šel k tabuli, kde dokreslil čáru do obrazce (obrázek 4.54), a řekl: „Takže takhle si to rozdělím na dva obdélníky, vynásobím ten obsah obdélníku a vydělím třema.“ Sám si uvědomil, že jeho postup není správný, a šel se posadit do lavice. Dokreslená čára ovšem pomohla ostatním spolužákům a zareagovala na ni Terka: „Když si spočítám ty čtverečky, tak tam nahoru je to tři a na tom spodu čtyři, takže tři krát čtyři, a to je dvanáct děleno dvěma.“ Zeptal jsem se jí tedy: „A těch tři krát čtyři děleno dvěma by byl obsah čeho?“ Terka pokrčila rameny a neodpověděla. Předpokládal jsem, že myslela obsah žluté části. Bohužel myšlenku nedokončila.

Obrázek 4.54

Ihned na to se přihlásila o slovo Naty a tvrdila: „Tím, jak to vlastně Milan rozpůlil, tak nejdřív bychom vypočítali obsah obdélníku a potom děleno dvěma a potom vlastně ještě děleno dvěma a tím bychom získali obsah jednoho toho trojúhelníku.“ Následně Milan popsal další svůj postup: „Takže tři krát dva, to je ten obsah celýho toho obdélníku, a to je šest.“ Zároveň jsem Milanovi položil otázku, k jaké barvě mám postup psát, on mi na to odpověděl, že je to jedno. Tak jsem to neřešil a psal do volného místa. „Jo, a to je šest, takže šest děleno dvěma, to je tři a to bude ta žlutá vpravo, no a šest děleno dvěma bude ta druhá půlka.“ Položil jsem tedy otázku, jak to bude s obsahem útvarů jednotlivých barev, a téměř hned jsem na základě odpovědí žáků mohl dopsat chybějící údaje.

Následně jsem zadal poslední sérií úloh z pracovního listu, ze které vyšel obrázek 4.55. Žák Ondra navrhl, že k nalezení výsledku by se celý obsah dal vydělit šesti. Položil jsem tedy otázku, proč by to tak šlo a zda mají trojúhelníky opravdu shodné obsahy. Na shodnosti obsahů se třída shodla. Objevila se i myšlenka komplementu.



Obrázek 4.55: Objevení společných vlastností trojúhelníků

Naty dále vyznačila, že trojúhelníky se shodují v jedné straně, ale vzhledem k tomu, že se myšlenka univerzálního řešení nehýbala dál, tak jsem jako nápovědu pro odhalení vztahu doplnil obrazec na obdélník a zeptal jsem se, co dál mají trojúhelníky společného. Když stále nepřicházela žádná myšlenka, položil jsem otázku: „Co můžete říci o jejich výšce?“ Dostal jsem odpověď, že je rovna čtyřem a že je pro všechny trojúhelníky stejná. Vzhledem k tomu, že nikdo ze třídy stále neviděl žádnou spojitost, přešel jsem opět na jinou úlohu, kde již naštěstí k abstrakčnímu zdvihu došlo.

4.6.3 Prvním abstrakčním zdvihem ke generickému modelu

Jak již bylo řečeno, abstrakční zdvih se velice složitě identifikuje. U každého žáka k němu dochází v jiném okamžiku. Zatímco jeden žák je ještě ve fázi izolovaných modelů, jiný žák již může využívat generický model, jak bude vidět v následující části. Ještě dodám, že k abstrakci dochází v průběhu celého pojmotvorného procesu.

4.6.3.1 Třída 7. C

Prvním velkým náznakem abstrakčního zdvihu bylo tvrzení Dominika na konci třetí vyučovací hodiny po absolvování aktivity „skládačka“. Položil jsem třídě otázku, zda někdo nechce říci něco zajímavého, co se naučil, nebo něco, co chce sdělit ostatním. Dominik se přihlásil a řekl, že ví, jak spočítat obsah „obecného“ trojúhelníku a rovnoběžníku (nejprve ho nesprávně nazval lichoběžníkem, ale v průběhu vysvětlování se opravil). Začal nejdříve pravoúhlým trojúhelníkem: „Když je trojúhelník pravoúhlej, stačí to vynásobit strana krát strana, teda ty, co souseděj s pravým úhlem, a to vydělit dvěma. Když je trojúhelník obecnej, tak se to vynásobí jakoby výška jeho krát strana (správně ukazuje a naznačuje v obrázku na tabuli) a tím se tak jako vypočítává to, akorát se to vydělí dvěma.“ Zeptal jsem se třídy, zda chápou Dominikovu myšlenku, ale Dominik mě přerušil a pokračoval: „A ten kosodélník se vypočítá výška krát strana.“

Obrázek 4.56: Dominik vysvětluje u tabule svoji myšlenku

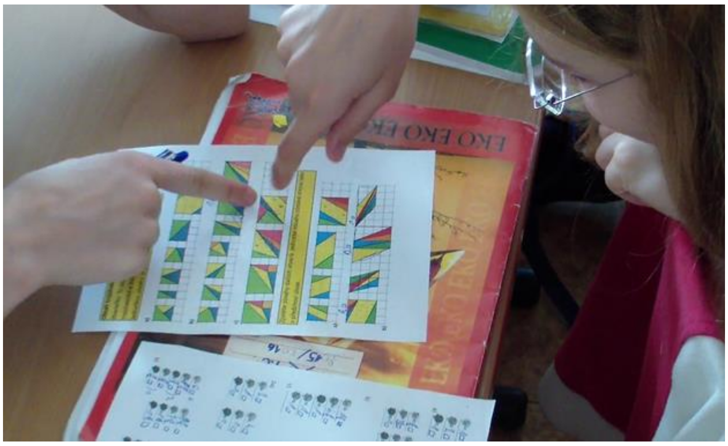
Vzhledem k tomu, že jsem nechtěl, aby se tato myšlenka ztratila, tak jsem obě tvrzení slovně zapsal na tabuli a u tvrzení, že obsah trojúhelníku je „výška krát strana a to děleno dvěma“ se ze třídy od žákyně Sabiny ozvalo: „Jaká?“ Dominik odpověděl: „Jakákoliv, akorát když máš tuhle stranu, tak k ní musíš mít výšku sem.“ a ukázal správně příslušnou výšku. Do toho se ozvalo zvonění a žák Michal se nesouhlasně ozval: „Ale Dominik říkal něco jiného, on říkal strana krát strana.“ Já se snažil uklidnit třídu, aby i po zvonění nechali Dominika myšlenku dovysvětlit. Dominik mě opět přerušil a Michalovi a zbytku třídy vysvětloval: „Když máš obecnej trojúhelník a jako ho spojíš, máš ho tam jakoby dvakrát, máš jakoby kosodélník (ukazuje vše na obrázku skládačky na tabuli), a ten trojúhelník počítáš stejně jako kosodélník, akorát ho vydělíš dvěma.“ Bohužel někteří žáci se už zvedali z místa, tak jsem hodinu ukončil tím, ať si myšlenku do příště rozmyslí.

Tato situace ukazuje, že Dominikovi se již podařilo proniknout částečně do problematiky obsahů obou útvarů, sám jsem nečekal, že objevení zárodku generického modelu bude tak rychlé. Je vidět, že mu stačilo podstatně menší množství izolovaných modelů pro odhalení závislosti než zbytku třídy. Bylo i vidět, že obsahy obou tvarů má propojené, což bylo i mým cílem v přípravě.

Na začátku následující hodiny jsem chtěl rekapitulovat a utřídit, co o obsahu trojúhelníků a rovnoběžníků již víme. Na moji výzvu se mi dostalo těchto odpovědí. Nejprve Lucka sdělila: „Trojúhelník byl vždy polovina obsahu obdélníku.“ Dalším tvrzením Kristýny bylo, že „nezáleží na obrazci, jaký má tvar, ale můžou být dva různé tvary, který mají stejný obsah“. Chtěl jsem uvést příklady, na což se ozval žák Michal a uvedl příklady kosodélníku a obdélníku z minulých hodin (nastal ovšem problém v terminologii, několik žáků stále pletlo, co je to lichoběžník a kosodélník, tak jsem na tabuli udělal rychlý přehled). Dále mě zajímalo, za jakých podmínek toto tvrzení platí. Dostalo se mi odpovědi, že útvary musí mít stejnou délku strany a výšky. Na závěr rekapitulace žákyně Irena uvedla, že „skoro ve všech obrazcích se dá najít trojúhelník“.

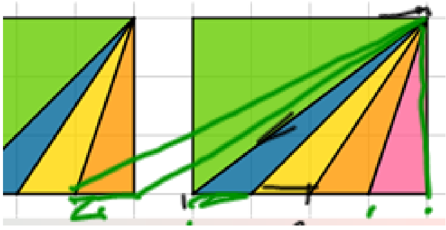
Zbytek hodiny byl věnován čistě výpočtu obsahů rozličných útvarů ve čtvercové síti (aktivita 4.4.2.3), které jsou na obrázku 4.27. Jednalo se o série podporující myšlenku komplementu útvaru a také myšlenku, že trojúhelníky se stejnou stranou a k ní příslušnou výškou mají stejné obsahy. Bylo vidět, že v rámci této hodiny už větší část žáků využívala generického modelu k nalezení obsahu, a také bych řekl, že tu došlo k většímu množství prvních abstrakčních zdvihů a také k viditelným a někdy i slyšitelným AHA-efektům, o kterých jsem se zmiňoval v oddíle 2.2.

Část hodiny věnovaná samostatné práci s pracovním listem probíhala v absolutní tichosti. Žáci byli natolik ponořeni do práce, že ani nevnímali moji nabídku možnosti spolupráce ve dvojici. Důležitá ovšem byla část, kdy byly prezentovány výsledky. Jako velice účinné se ukázalo velké množství příkladů, protože každý měl spočítáno tolik, kolik byl schopen zvládnout. Rychlým žákům jsem zadával úkol, ať hledají společné vlastnosti útvarů se stejnými obsahy. Na základě této výzvy se k sobě naklonily dvě žákyně Mirka a Lucka, které měly pracovní list vypracovaný, a začaly diskutovat o mojí otázce. Po chvíli zajásaly a řekly mi, že už to mají.



Obrázek 4.57: Diskuse Mirky a Lucky nad hledáním obecného řešení

Následně jsem přešel ke kontrole výsledků, které jsme všechny nekomentovali. Žáci chodili k tabuli a jejich výsledky byly z větší části správně. Pokud tomu tak nebylo, třída je hbitě opravila. Během prezentace výsledků se vyskytly dva důležité momenty. Po doplnění výsledků série b) jsem se zeptal, zda někdo na této sérii nevidí něco zajímavého. Přihlásila se Kačka a řekla, že ví, jak počítat obsah těch barevných částí: „Ten obsah, to je vlastně ta půlka, obsah celýho je 12, tohleto je 6 (ukazuje na trojúhelník vyznačený modře na obrázku 4.59)… a když to vydělím čtyřma, tak mám 1,5. No a ten růžovej je vlastně polovina toho krajního (dokresluje červený obdélník s úhlopříčkou do obrázku).“ Načež zareagovala Lucka, smazala Kaččino řešení, nakreslila svoje (obrázek 4.58) a tvrdila: „když ten trojúhelník je takhlec jedna širokej a tři vysokej, tak to vlastně bude vždycky jedna a půl.“

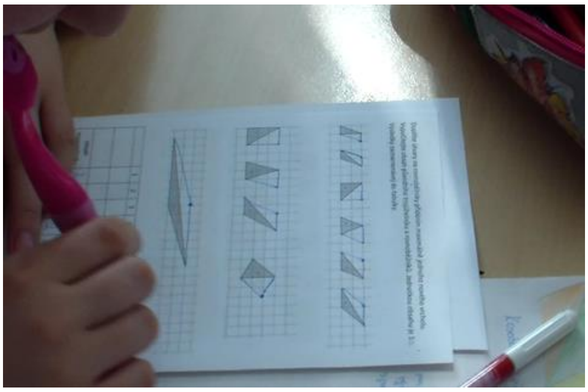


Obrázek 4.58: Lucky poznatek

Obrázek 4.59: Kačky poznatek

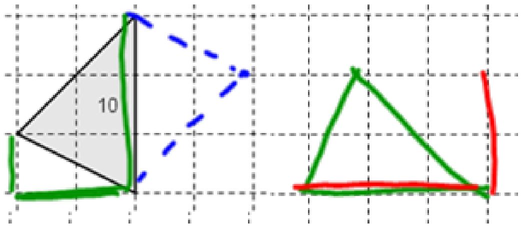
Dokreslila zelený trojúhelník a dodala, že je zase jedna a půl. Posupně tuto vlastnost ukázala na zbývajících trojúhelnících v sérii na tabuli a shrnula to větou: „Obsah trojúhelníku závisí na výšce a na tom, na čem stojí.“ Zde už vidíme další verzi generického modelu. Zatímco metoda Kačky je spíše procesuální a nefunguje pro všechny trojúhelníky, tak Luccina metoda je univerzálnější a stejná, jakou Dominik prezentoval dříve. Zde je dobře vidět, že abstrakční zdvihy jsou poplatné každému jedinci a jejich univerzálnost závisí na hloubce poznání.

V následující 5. hodině už zbývalo pro některé žáky vysvětlit, co se myslí pod pojmem výška, a ukázat ji na obrázcích. Žáci výšku označili jako „vzdálenost spodku k nejvyššímu bodu“. Zbytek sérií v úloze 4.4.2.3 již žákům nečinil žádný problém a dokonce bych se odvážil říci, že většina třídy byla schopna obsah počítat abstraktněji a již vynechávat počítání čtverečků. I z těchto důvodů nečinila úloha 4.4.3.3 zaměřená na doplňování trojúhelníků na rovnoběžníky a výpočty jejich obsahů větší potíže.



Obrázek 4.60: Doplňování trojúhelníků na rovnoběžníky

Jediný problém nastal při výpočtu obsahu trojúhelníku, který neměl stranu potřebnou k výpočtu umístěnou vodorovně. Tento překvapivý model byl do zadání umístěn zcela záměrně. Vznikla diskuse, zda je výška trojúhelníku 2, nebo 3. Po diskusi jsem žákyni Mirku nechal nakreslit shodný trojúhelník tak, aby „stál“ na straně délky tři, jak je vidět na obrázku 4.59. Poté už bylo jasně vidět, co je myšleno výškou. Na obrázcích je také patrné, že žáci mají zatím ukotven pojem výška pouze jako vzdálenost a bude třeba v rámci konstrukčních úloh v dalším ročníku pojem výška dodefinovat na trojúhelníku. Jako výhodu v tomto žákovském pojetí vidím, že částečně odráží již několikrát zmiňovaný komplement a propojení s obdélníkem.



Obrázek 4.61: Trojúhelníky a jejich výšky

V průběhu 5. hodiny se ukázal i zápis obsahu pomocí algebry, který přišel na tabuli představit Dominik. Poté, co ho zapsal, se ze třídy ozvalo: „Vždyť je to to samý, akorát pomocí písmenek.“ Mezitím Dominik doplnil, že písmenkem *a* myslí délku strany a délkou *v* výšku.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
strana a	1	1	2	2	2	2	2	2	2	3	8
výška v	2	2	2	2	2	2	3	3	3	2	2
obsah rovnoběžníku	2	2	4	4	4	4	6	6	6	6	16
obsah trojúhelníku	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	8

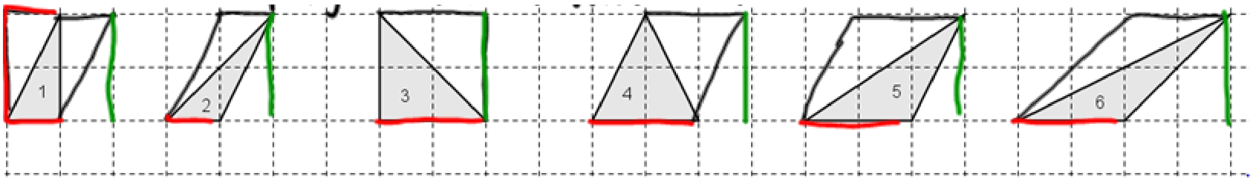
Obrázek 4.62: Tabulka s označením proměnných ze vzorce

$$S = \frac{a \cdot v}{2} \qquad S = a \cdot v$$

Obrázek 4.63: Dominikův vztah

4.6.3.2 7. B

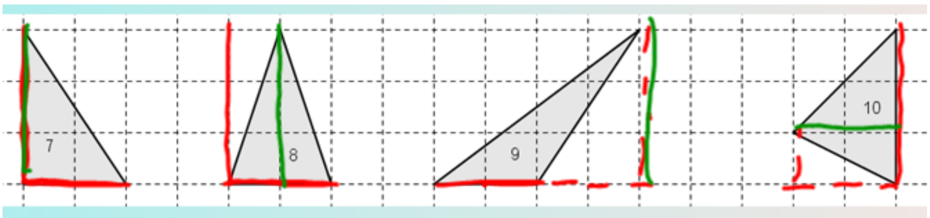
K abstrakčnímu zdvihu u některých žáků v rámci třídy 7. B došlo v průběhu aktivity 4.4.3.3 „doplňování na rovnoběžník.“ Tato úloha se v obou třídách ukázala jako velice účinná, možná i proto, že zaznamenání výsledků do tabulky usnadnilo odhalení závislosti. Původně jsem plánoval, že nepojmenuji první dva řádky tabulky a nechám žáky odhalovat jejich funkci (to jsem udělal v 7. C). Vzhledem k času jsem se ale rozhodl tento mezikrok vynechat. Přibližně po 15 minutách mi žáci diktovali nalezené obsahy a společně jsme doplňovali tabulku. Když ji žáci doplnili, zeptal jsem se, zda-li někdo nalezl i výšky daných útvarů a jejich délky. Přihlásila se Naty a šla výšky vyznačit zelenou barvou na tabuli (viz obrázek 4.64).



Obrázek 4.64: Odhalování generického modelu v 7. B

Na obrázku je vidět, že stejně jako v 7. C byl pojem výšky chápán spíše intuitivně a bude třeba ho dále během hodin geometrie rozpracovávat. Pro potřeby obsahu trojúhelníku je ovšem tato představa dostatečná. Zároveň bylo patrné, že žáci chápou výšku jako délku strany obdélníku v roli komplementu k danému trojúhelníku. Na konci hodiny se podařilo část tabulky doplnit, ale bohužel myšlenka byla přerušena zvoněním, tak jsem alespoň zareagoval větou, ať si žáci vztah promyslí do další hodiny.

Už jsem ani nedoufal, že generický model objeví žáci sami, ale naštěstí na začátku poslední hodiny k tomu došlo. Přihlásil se Ondra a rekapituloval na mé vyzvání průběh předchozí hodiny: „Když jsme chtěli spočítat rovnoběžník, tak k tomu stačilo akorát strana krát výška a trojúhelník, tak ten výsledek stačil vydělit dvouma.“ Nikdo ze třídy neodporoval, tak jsem Ondrův návrh nijak nekomentoval a vyzval jsem třídu k doplnění zbytku tabulky. Úkol se podařil a dokonce byl nalezen obsah trojúhelníku číslo 10, který v 7. C činil problém a vyvolal rozsáhlou diskusi. Rád bych ovšem dodal, že na rozdíl od 7. C jsem musel v 7. B poskytnout velké množství nápověd a navíc je téměř jasné, že ve chvíli, kdy byl objeven generický model slovně zapsaný, velké množství žáků ještě netušilo, jak k obsahu dospět. V tomto ohledu byl užitečný zbytek hodiny, který byl věnován zejména upevňování generického modelu a jeho prohlubování.



Obrázek 4.65: Výšky a strany potřebné k výpočtu obsahu trojúhelníku a rovnoběžníku v 7. B

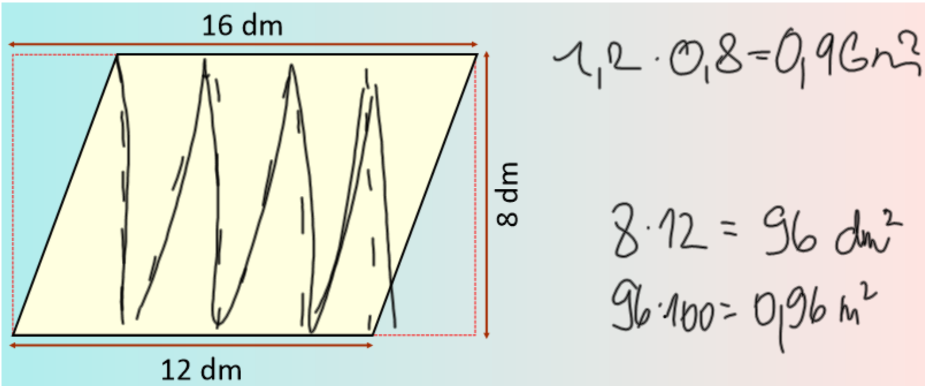
4.6.4 Upevňování generického modelu – cesta k abstraktnímu poznání

Poslední část popisu výuky se bude věnovat zejména fázi krystalizace. Většina žáků již tedy využívá k výpočtům generický model a pomocí řešení vhodných úloh si nový poznatek začleňuje do vědomí v různých kontextech a postupně přechází k poznatku abstraktnímu. I proto závěrečná část výuky byla zasvěcena především procvičování na různých úlohách. Rád bych zároveň podotkl, že i když již popisuji fázi krystalizace v rámci pojmotvorného procesu vzhledem k průběhu výuky, nemusí to nutně znamenat, že všichni žáci již přešli ze stadia izolovaných modelů až k modelu generickému, eventuálně dále. Stejně jako celý pojmotvorný proces, tak i fáze krystalizace probíhá zcela individuálně.

4.6.4.1 7. C

Jako vhodnou úlohu pro začátek procvičování jsem zvolil úlohu 4.4.4.1 s názvem „deska stolu“. Úlohu jsem zvolil zejména proto, že se dá řešit mnoha způsoby, a to i když někteří žáci neznali generický model. Nejprve ji řešil každý sám, až následně byla prezentována řešení u tabule. První, kdo měl hotové správné řešení a chtěl prezentovat, byl Martin. Přišel k tabuli a popsal svůj postup takto: „Já jsem si vzal tu stranu a výšku (zároveň ukazuje na tabuli) a vypočítal jsem si to

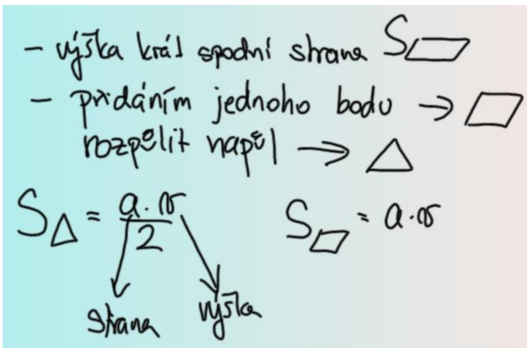
1,2 · 0,8 = 0,96 m², a to je ta plocha, co počítám.“ Zeptal jsem se tedy, zda bude stačit plechovka, a dostalo se mi odpovědi, že ano a prý ještě zbyde. Následně jsem vyzval zbytek třídy, zda někdo úlohu neřešil jiným způsobem, a přihlásila se Anička. Nejprve obrázek rozdělila tak, jak je vidět na obrázku 4.66.



Obrázek 4.66: Řešení Martina (nahoře) a Aničky (dole včetně čar v kosodélníku)

Svůj náčrtek ihned vysvětlila a dodala postup: „Prostě ty části jsou tam čtyři a vim, že dvanáct děleno čtyřma jsou tři (ukazuje na spodní stranu kosodélníku), takže jedno tohlento (spodní strana jednoho trojúhelníku) bude mít tři. No a tři krát osum to je dvacetčtyři a polovina je dvanáct no a to je tam… (ukazuje 8 shodných trojúhelníku).“ Anička odešla od tabule a já se zeptal, jak dokončíme řešení, tedy kolikrát tam bude ten obsah 12. Ihned jsem dostal odpověď 8, rovnou i s komentářem od Wendy, že výsledek je 96. Zeptal jsem se jen pro pořádek: „A čeho?“ Žáci opět ve větším počtu dodali „decimetrů čtverečních“. Ihned do řešení vstoupil Kuba a dodal: „Ještě děleno stem.“ Třída tak dospěla ke stejnému výsledku 0,96 m². Jak řešení Martina, tak řešení Aničky vyžadovalo vhled do problematiky. V prvním případě Martin nalezl vhodné parametry, které využil v již získaném vztahu pro obsah kosodélníku. V druhém případě si Anička všimla jisté symetrie útvaru a využila konzervace míry. Jak bylo vidět, v obou případech se řešení obešlo bez využití algebraických vzorců, což svědčí o tom, že žáci rozuměli tomu, co počítali.

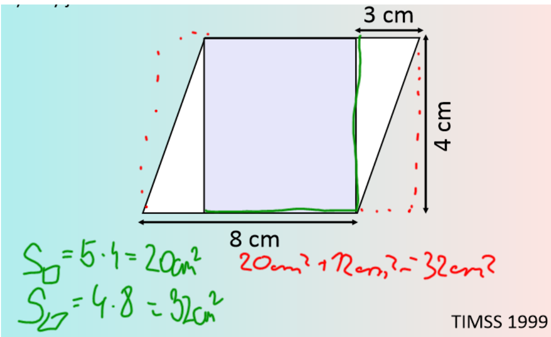
V následující hodině jsem po žácích požadoval, aby mi shrnuli, jaké nové vztahy pro obsahy útvarů se v rámci experimentální výuky naučili. Výstup je na obrázku 4.67.



Obrázek 4.67: Souhrn získaných vztahů

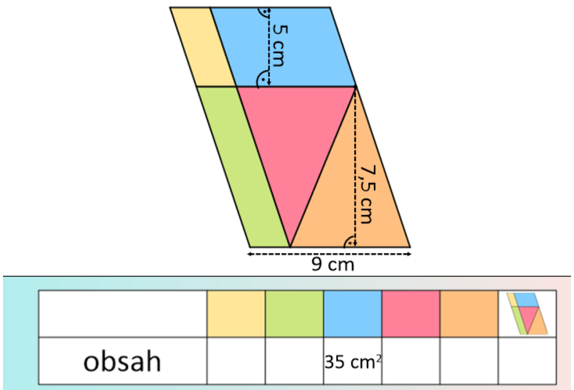
Informace na tabuli byly zaznamenány tak, jak mi je žáci na začátku poslední hodiny diktovali. Za povšimnutí stojí poznatek Kuby, který řekl: „Přidáním jednoho bodu z trojúhelníku vznikne rovnoběžník, jehož obsah spočítáme, a potom si ho rozdělíme napůl, protože předtím jsme si přidali ještě jeden trojúhelník, a tím získáme obsah trojúhelníku.“ Tuto myšlenku zároveň rozšířil Dominik pomocí algebraického vzorce. Zatímco Kuba vysvětlil hledání obsahu procesuálně (i když matematicky ne zcela přesně), Dominik již představil hotový koncept, který v sobě přesně skrývá Kubovu myšlenku. V případě, že Dominik opravdu tuší, co daná písmena ve vzorci představují, je možné, že v jeho případě se již jedná o abstraktní poznatek.

První úlohou v rámci poslední hodiny byla úloha z testování TIMSS 1999 (4.4.4.2), která nečinila problém. Řešení 20 cm^2 pro zadání a) představil ihned Jindra a na něj navázala i Lucka s obsahem rovnoběžníku b), kdy využila obsahu 20 cm^2 a přidala k němu ještě obsah 12 cm^2 jako obsah dvou pravoúhlých trojúhelníků, které zbývalo přidat. Objevilo se i klasické řešení „strana krát výška,“ tedy 4 · 8, jak je vidět na obrázku 4.68.



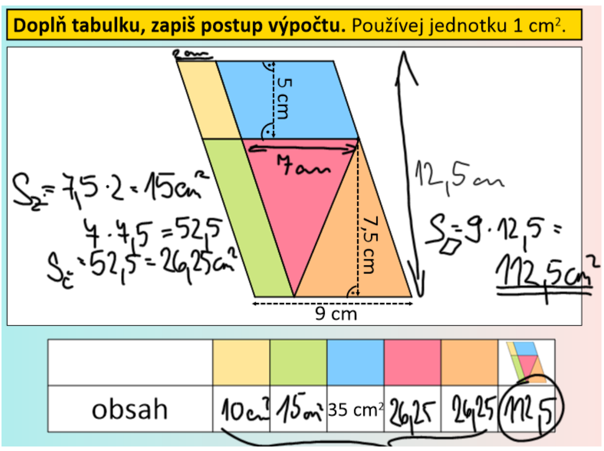
Obrázek 4.68: Žákovská řešení úlohy TIMSS

Jako další úloha následovala upravená úloha 4.4.3.1, kde jsem kvůli času doplnil některé údaje, ale zároveň, aby úloha nebyla standardní, jsem doplnil obsah jedné části (obrázek 4.69). K výpočtu zbývajících částí tedy bylo potřeba dopočítat některé další parametry. Myslím, že touto úpravou úloha neztratila na své podnětnosti, ale naopak umožnila žákům, aby řešili jiný typ úloh, než jaké byly řešeny dříve.



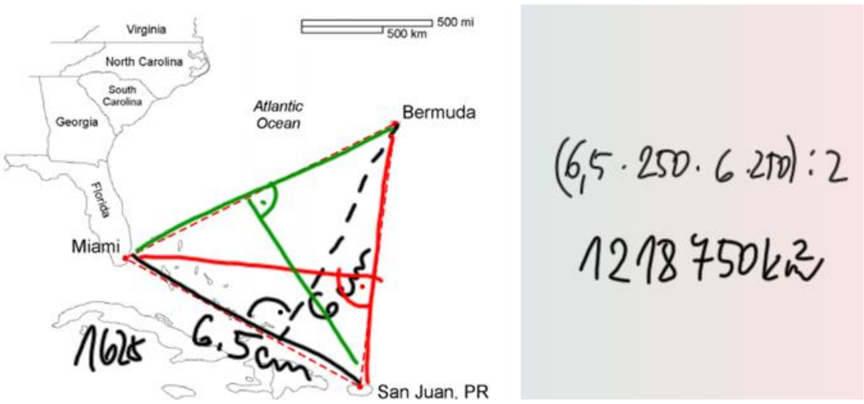
Obrázek 4.69: Upravené zadání úlohy 4.4.3.1

Zároveň jsem do úlohy zařadil i počítání s jinými čísly než přirozenými. Průběh řešení této úlohy opět nasvědčoval hlubšímu porozumění probírané látce. Jako první se přihlásila Anička, šla k tabuli a doplnila správě obsah žluté části 10 cm^2 a zároveň vyznačila do obrázku délku žluté strany 2 cm. Zeptal jsem se, jak na hodnotu údaje přišla, odpověděla: „Když tady to je 9 cm (ukazuje na délku spodní strany) a tohleto je jakože… (zamyslí se a ukazuje na délku strany 7 cm, která na tabuli zatím chybí), nevim, jak to mám vysvětlit.“ Na to se okamžitě ozvalo několik žáků a někteří se dokonce dožadovali přítomnosti u tabule větou: „Můžu to vysvětlit?“ Nakonec jsem vyvolal Kubu, který doplnil myšlenku Aničky: „Vlastně když víme, že ten obsah kosodélníku je třicet pět centimetrů čtverečních, tak když si to vydělíme pěti, dostaneme 7 cm, což je ta spodní strana. Tím pádem víme, že 9…“ Kubu jsem přerušil, zda může jít na tabuli získané informace vyznačit. Kuba přišel k tabuli a dokončil svoji myšlenku zakreslením délky strany 7 cm: „Tím pádem, když tady to devět centimetrů (ukazuje na tabuli) a tady je 7 cm (opět ukazuje), tak devět mínus sedm jsou dva centimetry.“ Zároveň ještě dokreslil výšku celého obrazce 12,5 cm získanou jako součet 5 cm a 7,5 cm. Jako další šla k tabuli Kristýna, doplnila hodnotu 15 cm^2 jako obsah zelené části a dodala, že obsah zelené části spočítala jako 7,5 · 2, což je 15 cm^2. Výpočet jsem zapsal na tabuli. Žákyně Irena se přihlásila a opravila postup Kristýny: „Já myslela, že ta zelená část je jako, že si spočítám délky na jedný straně, na druhý straně, že to je dva krát sedm celých pět a dva krát dva, to je čtyři.“ Třída ji přerušila, několikrát zaznělo „ehm, ehm“ a věta: „my ale počítáme obsahy.“ Irena dodala: „No jo.“ V řešení pokračovala Kačka, která vypočítala nejprve obsah kosodélníku složeného z oranžového a červeného trojúhelníku jako 7 · 7,5, což jí vyšlo 52,5 cm^2, a následně obsah rozpůlila a dodala, že obsah 26,25 cm^2 bude shodný pro oba trojúhelníky. Celou úlohu zakončil Michal a doplnil, že obsah nalezl jako součin 9 · 12,5 tedy obsah celého útvaru byl roven 112,5 cm^2. Celé řešení je na obrázku 4.70.



Obrázek 4.70: Řešení úlohy "Obsah částí kosodélníku" žáky 7. C

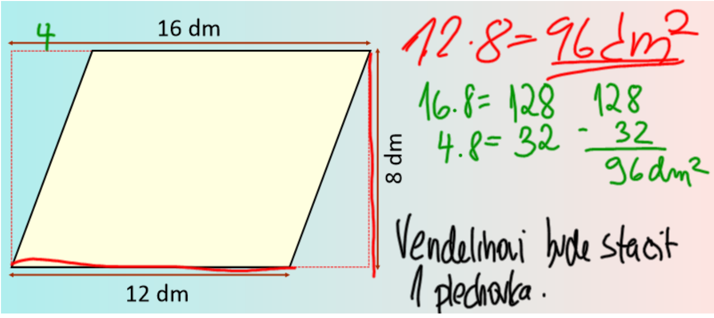
V závěru hodiny stihli žáci vyřešit ještě úlohy 4.4.4.3 „Mřížové trojúhelníky“ a 4.4.4.4 „Bermudský trojúhelník.“ V rámci první zmíněné úlohy jsme se museli vrátit k prohlubování pojmu výška, věděl jsem, že pro úlohu Bermudský trojúhelník je nutné umět výšku trojúhelníku nalézt. Žáci tedy v rámci tréninku doplňovali do konkrétních trojúhelníků na tabuli výšky. Zazněla také velice důležitá informace, že výška musí být vždy kolmá na příslušnou stranu, bohužel si myslím, že času na procvičování jsem věnoval málo a rozhodně bude třeba uvést přesnou definici výšky v rámci konstrukčních úloh a provést případnou reedukaci. Výsledek poslední skupinové úlohy „Bermudský trojúhelník“ již pouze představuji na obrázku 4.71, na kterém je vidět nejen správné zakreslení výšek, ale i správně uvedený postup, který se podařilo vzhledem k času naleznout pouze dvěma skupinám.



Obrázek 4.71: Řešení úlohy "Bermudský trojúhelník

4.6.4.2 7. B

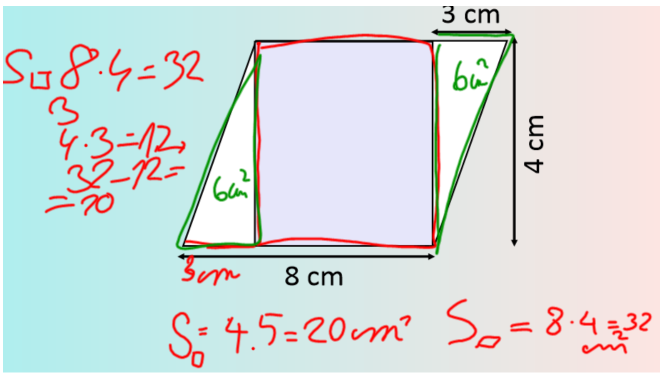
V porovnání se 7. C bylo času na procvičení v 7. B podstatně méně. Nicméně i tak se stihla během poslední hodiny většina připravených úloh. Procvičování začalo úlohou „Deska stolu“ (4.4.4.1), kde se kromě standardního postupu „strana krát výška“ objevilo překvapivě i řešení metodou doplnění na komplement. Adéla to popsala takto: „Já jsem si nejdřív spočítala obsah celýho toho obdélníku, a pak když jsem věděla, že tohle to měří šestnáct (ukazuje na horní údaj v obrázku), a tohle to, že dvanáct (ukazuje opět na údaj v obrázku), tak šestnáct mínus dvanáct je čtyři (nalezený údaj doplňuje do obrázku). Potom jsem spočítala čtyři krát osm, což je třicet dva. Obsah celýho toho útvaru vyšel sto dvacet osm a sto dvacet osm mínus třicet dva je devadesát šest.“ Adéla zapsala řešení na tabuli. Ještě jsem se jí doptal podrobněji, proč odečítala konkrétně 32. Adéla mi odpověděla: „Ty dvě strany jsou na sebe rovnoběžný, to znamená, kdybysme k sobě dali ty trojúhelníky, ty části, tak by to prostě do sebe sedlo. Vytvořilo by to obdélník o straně čtyři krát osm.“ S vysokou pravděpodobností Adéla k metodě odřezávání přistoupila na základě své zkušeností z manipulativní činnosti zařazené v úvodu experimentální výuky. Postupy 7. B při řešení této úlohy je vidět na obrázku 4.72.



Obrázek 4.72: Řešení úlohy „Deska stolu“ v 7. B

Za zmínku stojí i zajímavý rozdíl ve volbě jednotky. 7. C volila při řešení jako jednotku m^2, což vyžadovalo výpočet v desetinných číslech. Žáci 7. B naopak počítali výhradně v dm^2 bez nutnosti převodů jednotek.

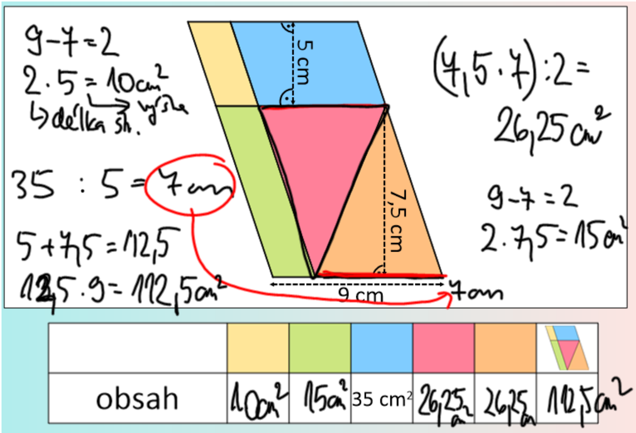
Další v pořadí byla úloha z TIMSS 1999 (4.4.4.2), kde se opět ukázalo, že i přes počáteční obtíže s nalezením vztahu pro kosodélník byli žáci schopni bez problému nalézt správná řešení (viz obrázek 4.73).



Obrázek 4.73: Řešení úlohy "TIMSS 1999" v 7. B

První šel k tabuli Honza představit svoje řešení: „No tak… když tady to je tři centimetry (zakresluje údaj do tabulky), to jsme odečetli od osmi centimetrů, to je pět. Výška jsou čtyři, takže čtyři krát pět je dvacet.“ Dále šel k tabuli Petr představit obsah kosodélníku: „Es rovná se osm krát čtyři... třicet dva centimetrů čtverečních.“ Zeptal jsem se, zda někdo nemá ještě jiné řešení, a přihlásil se Ondra, že spočítal ještě jinak obdélník. Na vyzvání šel tedy k tabuli a svůj postup popsat takto: „Počítal jsem osm krát čtyři, což je třicet dva, a potom tři krát čtyři, což je dvanáct, a to jsou jako ty části, který tam jako nemaj bejt… třicet dva mínus dvanáct a to je dvacet.“ I toto řešení ukazuje na hlubší porozumění tématu. Položil jsem ještě doplňující závěrečnou otázku k úloze, jaký by byl obsah bílých částí. Dostalo se mi správné odpovědi 6 cm^2. Na tuto odpověď reagoval Petr, proč obsah trojúhelníku není 6 cm^2. Honza mu vysvětlil přes obdélník rozpůlený úhlopříčkou, že obsah musí být poloviční. Na této situaci je vidět, že žák se nebál zeptat v případě problému a že atmosféra byla uvolněná. To svědčí i ochotě prezentovat výsledky u tabule a nabízet různá řešení.

Stejná pozitiva se objevila i u řešení úlohy 4.4.3.1, na jejímž řešení mohli žáci spolupracovat ve dvojicích, čehož někteří využili. Výsledek jejich práce je vidět na Obrázek 4.74. Výpočet v 7. B probíhal podobně jako v 7. C, nebudu ho zde tedy dále rozvádět. Je důležité dodat, že žáci již k výpočtu obsahů v této úloze využívali výhradně nalezený vztah.



Obrázek 4.74: Řešení úlohy "Obsahy částí kosodélníku" v 7. B

Úloha 4.4.4.3 „Mřížové trojúhelníky“ byla závěrečnou v 7. B. Ve třídě nebyl problém intuitivně porovnat obsahy trojúhelníků, bohužel již nezbyl čas na podrobnější komentáře. Chtěl jsem alespoň na závěr dva získané vztahy slovně shrnout, zeptal jsem se tedy, jak vypočítají obsah trojúhelníku a rovnoběžníku. Společně se zvoněním mi je žáci nadiktovali a já je zapsal na tabuli.

4.7 Post-test a jeho výsledky.

Bezprostředně po absolvování experimentální výuky byl v následující hodině žákům obou tříd zadán post-test prověřující zejména schopnost řešit úlohy zaměřené na zjišťování obsahů rovnoběžníků a trojúhelníků. Jedna úloha se přímo těmto útvarům nevěnovala, byla vybrána z testování *Kalibro* a sloužila jako úloha srovnávací. Jedním z cílů experimentální výuky byla totiž i reedukace některých nedostatečných základních znalostí v oblasti plošné míry, mezi něž se řadil i obsah obdélníku.

Ze třídy 7. C bylo závěrečnému testování přítomno 24 žáků a ze třídy 7. B 21 žáků. Test byl složen celkem z pěti úloh a k jejich vypracování bylo vyhrazeno maximálně 25 minut. Úlohy byly vybírány tak, aby se mezi nimi objevila alespoň jedna klasická úloha z učebnic, jedna úloha prověřující vlastnosti rovnoběžníku a výpočet obsahu ve čtvercové síti, dále úloha, kde je nutné vyčíst parametry z obrázku a jedna úloha zaměřená na obsahy obecně. V průběhu testování byla ze strany žáků položena pouze jedna otázka týkající se zadání úlohy 5; k této otázce jsem se vyjádřil v oddíle 4.7.5.

Při analýze žákovských řešení jsem se zaměřil především na časté chyby, ale také na rozdílné způsoby řešení. Následně jsem porovnával průměrné úspěšnosti řešení jednotlivých úloh, a to nejen v rámci tříd, ale také v celkovém součtu. Výsledky úloh 3 a 5 jsem navíc porovnával s výsledky z jiných výzkumů, kde byly stejné úlohy zadány. V následujícím oddíle postupně představím jednotlivé úlohy z testu včetně celkových dosažených výsledků představených formou krabicového grafu. Úspěšnosti jednotlivých úloh jsem uvedl zaokrouhlené na celá procenta.

4.7.1 Úloha 1 – Obsah kosodélníku a trojúhelníku klasicky

1. a) Vypočítejte obsah *kosodélníku*, pro který platí, že délka jedné jeho strany je 6 cm a délka k ní příslušné výšky je 8 cm.

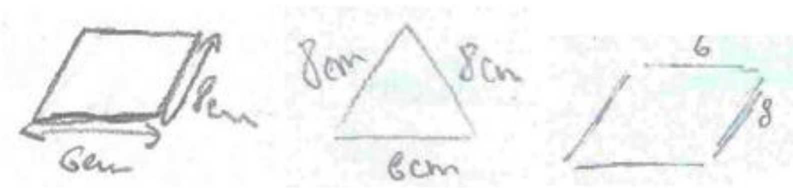
   Obsah kosodélníku je: ____________________

   b) Vypočítejte obsah *trojúhelníku*, pro který platí, že délka jedné jeho strany je 6 cm a délka k ní příslušné výšky je 8 cm.

   Obsah trojúhelníku je: ____________________

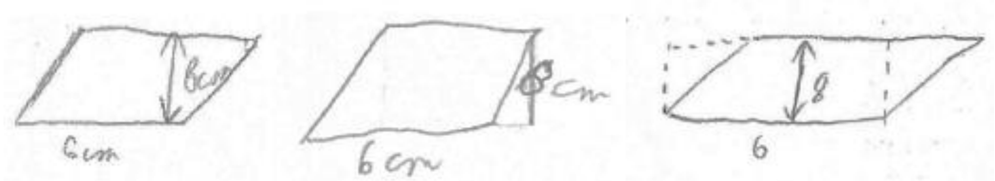
Obrázek 4.75: Zadání úlohy 1

První úloha post-testu prověřovala pouhou znalost vztahu pro obsah trojúhelníku a rovnoběžníku; úloha nekladla na žáky vyšší kognitivní nároky. Úlohy tohoto typu jsou k nalezení v běžných učebnicích pro základní školy. Správná odpověď v části úlohy a) byla 48 cm^2, v případě b) to byla přesně polovina, tedy 24 cm^2. Průměrná úspěšnost této úlohy byla souhrnně přibližně 84 %. V 7. C byl výsledek nadprůměrný, přibližně 94 %, a v rámci třídy se vyskytla pouze dvě chybná řešení. V 7. B byla úspěšnost nižší, asi 74 %. Jako nesprávné odpovědi u zadání a) se vyskytla čísla: 16, 42, 24, 384, 28, 86 a 96 U zadání b) se dokonce třikrát vyskytlo číslo 48, dále pak jednou číslo 14 a ve zbývajících dvou případech žáci úlohu nevyřešili. Nepatrně lépe šel žákům řešit obsah trojúhelníku, tedy část za b), průměrně se to podařilo přibližně 87 % žáků. Úloha má sice poměrně vysokou úspěšnost, ale je na ní paradoxně vidět, že k výpočtu žák naprosto nepotřebuje vědět, co je to výška, jak se i ukázalo v řešeních šesti žáků obou tříd. Pokud žák ví, že má vynásobit dvě hodnoty a žádné jiné parametry nejsou třeba, tak to tak i udělá. Na obrázku 4.76 je několik náčrtků, které se vyskytovaly v řešeních žáků, kteří měli správný výsledek úlohy 1.



Obrázek 4.76: Nesprávné zakreslení výšek útvarů

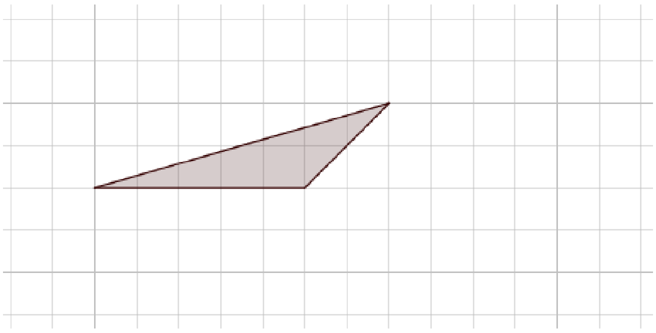
Naopak v mnoha případech, kde si žáci náčrtky dělali, bylo vyznačení výšky správné nebo alespoň v intuitivním chápání. Leckdy byla výška vnímána jako délka strany obdélníku, který je komplementem k rovnoběžníku.



Obrázek 4.77: Správná načrtnutí parametru výšky

4.7.2 Úloha 2 – Doplňování na rovnoběžník

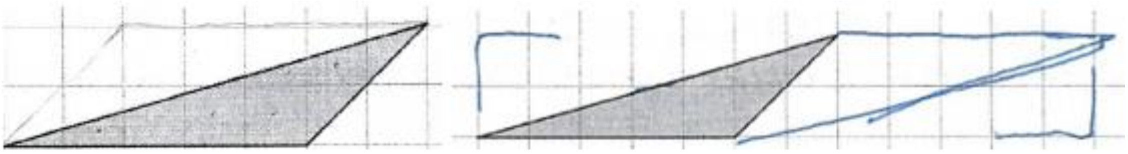
2. Vypočítejte obsah mřížového trojúhelníku na obrázku, následně doplňte trojúhelník přidáním maximálně jednoho vrcholu na rovnoběžník a vypočítejte jeho obsah. Jednotka obsahu je 1□.



Obsah trojúhelníku je: ____________________ Obsah rovnoběžníku je: ____________________

Obrázek 4.78: Zadání úlohy 2

Druhá úloha měla především prověřit, zda žáci rozumí závislosti mezi obsahem trojúhelníku a obsahem rovnoběžníku a zda dokáží počítat obsahy útvarů ve čtvercové síti. Možností, jak doplnit útvar na rovnoběžník, bylo hned několik, žáci si mohli zvolit libovolnou. Správnou odpovědí v případě trojúhelníku bylo 5□ a v případě rovnoběžníků 10□. Délka strany byla v obou případech 5 a příslušná výška 2. Úspěšnost úlohy byla v obou třídách poměrně vysoká. U 7. C výrazně vyšší, asi 79 %, u 7. B přibližně 65 %. Třem čtvrtinám testovaných žáků se podařilo správně trojúhelník doplnit na rovnoběžník. V 7. B byly žáci úspěšnější ve výpočtech. Obsah trojúhelníku nalezlo 86 %, zatímco v 7. C to bylo pouze 79 %. Naopak 7. C byla silnější v doplňování obrazce na rovnoběžník, to se podařilo 88 % žáků.



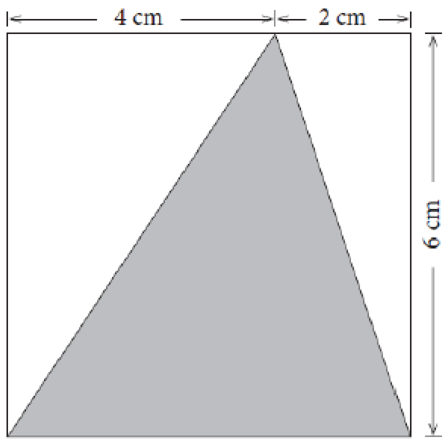
Obrázek 4.79: Dvě ukázky správného doplnění útvaru na rovnoběžník

V rámci špatných odpovědí se objevily kombinace výsledků 6 a 12 ve dvou případech a poté kombinace 5,5 a 11 též ve dvou případech. Oba chybné výsledky ukazují, že žáci mají propojený vztah mezi obsahy obrazců, ale ve všech případech se jednalo o chybu početní, zejména kvůli tomu, že úloha byla řešena procesuálně přes počítání čtverečků bez využití závislosti. V jednom případě se dokonce vyskytla kombinace výsledků 4,75 a 6, která ukazuje na dva problémy, z nichž jeden tkví v počítání obsahů ve čtvercové síti a druhý v nedostatečném propojení mezi obsahy obou útvarů.

Závěrem k této úloze bych dodal, že do testu byla zařazena především z důvodu, že jako jeden ze zásadních problému žáků v oblasti míry je právě oddělenost výpočetní procedury od pojmu obsah, jak Vondrová popisuje ve své kapitole (2015, s.294–298). Ukázalo se, že v rámci této úlohy většina žáků tento problém neměla (což bylo i jedním z cílů experimentální výuky).

4.7.3 Úloha 3 – Trojúhelník ve čtverci

3. Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený šedý trojúhelník. Jaký je obsah vybarveného trojúhelníku?

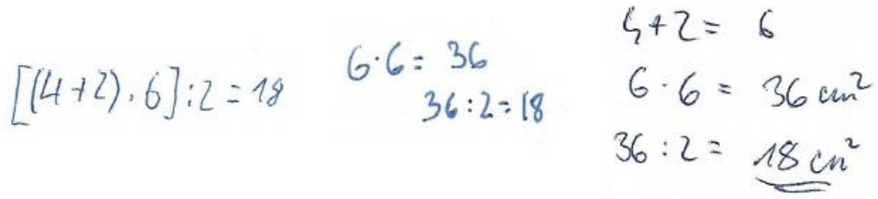


Obsah šedého trojúhelníku je: ______________________

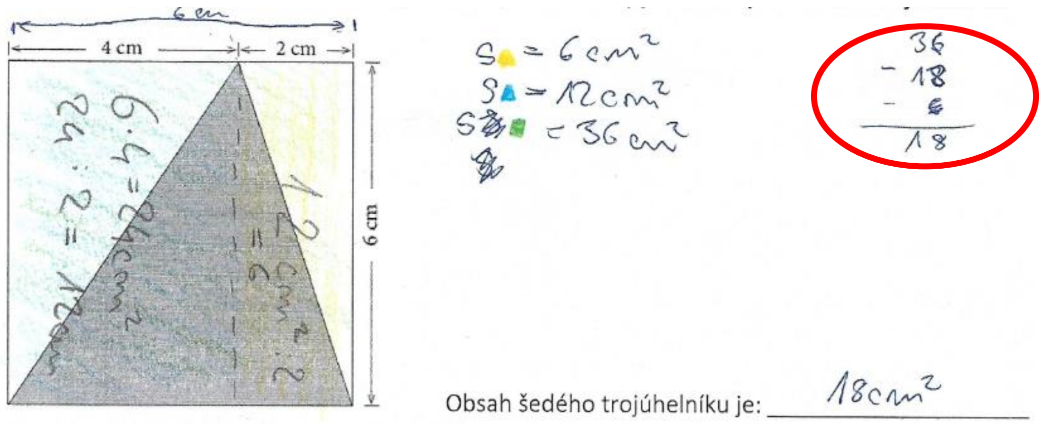
Obrázek 4.80: Zadání úlohy 3 (Tomášek et al., 2009)

Úloha prověřuje schopnost žáků naleznout v obrázku výšku a pro výpočet obsahu následně využít vztah pro obsah trojúhelníku (obrázek 4.81) a dosadit do něj parametry získané z obrázku, eventuálně naleznout alternativní způsob např. rozdělením útvarů na menší části. Podle článku (Rendl, Vondrová, 2014) existují přinejmenším tři způsoby řešení této úlohy. V prvé řadě se dá úloha řešit pomocí vzorce (vztahu) pro obsah trojúhelníku. Dále je možnost rozdělit čtverec výškou trojúhelníku kolmou na stranu délky 6 cm na dva obdélníky, obsah je pak hledán jako součet obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků. Třetím a zřejmě pro žáky nejsložitějším způsobem je řešení analytické, kdy žák přesune vrchol trojúhelníku do jednoho z rohů a potom počítá obsah trojúhelníku jako polovinu obsahu čtverce. Tento způsob řešení ale nikdo v post-testu nevyužil. První a druhé řešení v testu bylo využito s rozdělením přibližně „půl na půl“.

V rámci šetření TIMSS 2007 byla úspěšnost při řešení českými žáky 8. ročníku pouze 23,1 %, což bylo 5,6 % pod mezinárodním průměrem (Rendl, Vondrová, 2014, s. 50). V rámci jiného šetření provedeného se 185 českými žáky (Vondrová, 2015) byla procentuální úspěšnost žáků 7. ročníku vyšší, a to 54,6 %. V porovnání s těmito šetřeními se dají považovat výsledky žáků v post-test za nadprůměrné. V 7. B byla průměrná úspěšnost 60 %, v případě 7. C dokonce 88 %, což znamenalo, že pouze tři žáci měli špatnou odpověď a nenalezli správnou odpověď 18 cm^2. Čtyři žáci v obou třídách úlohu vynechali (přibližně 9 %).

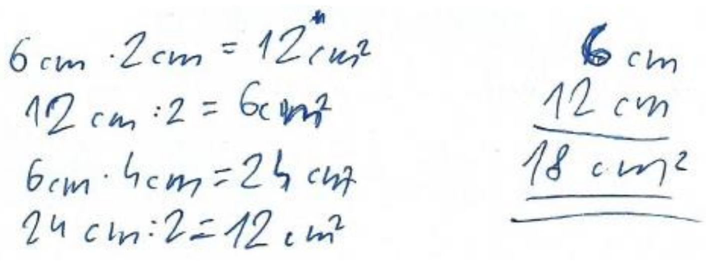


Obrázek 4.81: Tři správná řešení úlohy – využití vztahu



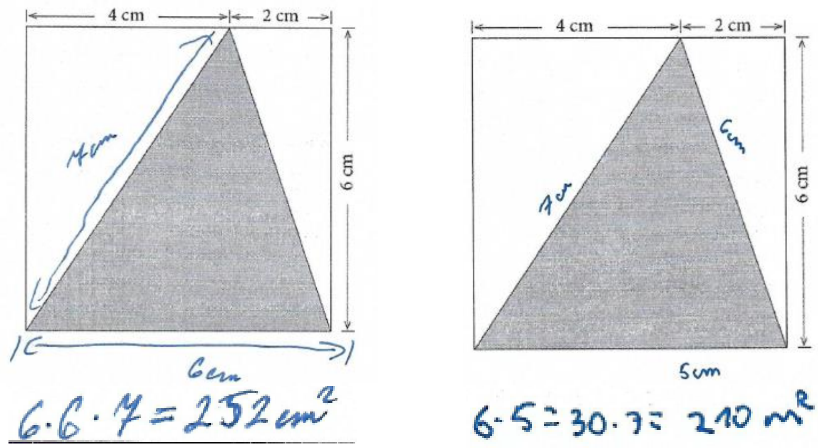
Obrázek 4.82: Správné řešení metodou rozdělování I

Obrázek 4.82 ukazuje způsob řešení, kdy žákyně nejdříve vypočítala obsah celého obrazce a následně „odřezávala" nepotřebné části (červeně zakroužkováno). Obrázek 4.83 ilustruje též metodu „rozřezávání." Výsledný obsah byl ale nalezen jako součet obsahů dvou pravoúhlých trojúhelníků, které z obdélníků vznikly rozdělením úhlopříčkou.



Obrázek 4.83: Správné řešení metodou rozdělování II

Nyní rozeberu podrobněji nesprávná řešení. V 7. B se opět vyskytla dvě řešení 48 cm^2, kdy žák počítal výsledný obsah jako součin všech tří hodnot, které se v obrázku vyskytly, tedy jako součin $4 \cdot 2 \cdot 6$. Další podobná nesprávná řešení jsou na obrázku 4.84, kdy na obrázku vlevo žákyně nesprávně doplnila parametr 7 cm a celkový obsah poté hledala jako součin tří zvolených hodnot, což stejně jako v předchozím případě připomíná vztah pro objem. V pravé části obrázku žák doplnil nesprávně parametry dokonce tři. Skupina těchto nesprávných řešení svědčí o nepochopení pojmu obsah a až přílišné soustředění na jednokrokové řešení obvykle podpořené vzorcem. Všechna nesprávná řešení tohoto charakteru pocházela ze 7. B, kde už v rámci pre-testu byla patrná přílišná fixace na vzorce.



Obrázek 4.84: Dvě nesprávná řešení úlohy 3

Další nesprávné řešení s výsledkem 24 cm^2 ukazuje na problém záměny vztahu pro obsah a obvod, navíc u tohoto konkrétního řešení (obrázek 4.85) lze vidět, že žák nemá propojené výpočty obsahu s podstatou pojmu obsah. První výsledek, který byl přeškrtnut, byl součin tří hodnot, mezi nimiž žák následně změnil operaci a hledal součet. Navíc hodnota 10 se nikde v obrázku nevyskytuje.

Obrázek 4.85: Nesprávné řešení úlohy 3

V posledním nesprávném řešení s odpovědí 36 cm^2 žák nalezl pouze obsah čtverce podle vztahu $a \cdot a$.

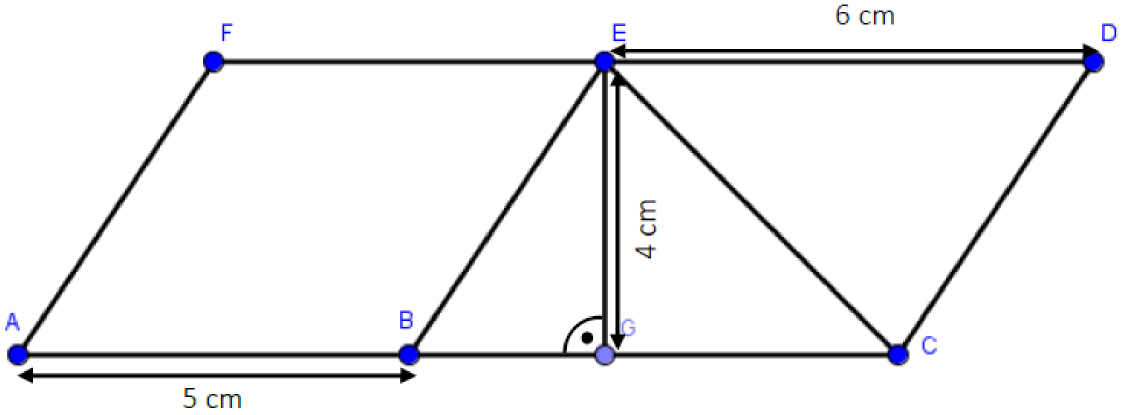
Za důležité považuji porovnání výsledku úlohy 4.3.4 z pre-testu s výsledky této úlohy, obě byly stejného zaměření a pro jejich řešení se dalo použít podobných řešitelských strategií. V pre-testu byla úspěšnost 7. B pouhých 40 %, v 7. C přibližně 66 %. V post-testu došlo k citelnému zlepšení u obou tříd. V 7. B se úspěšnost při řešení zvýšila o 20 % na 60 % a úspěšnost v 7. C se zvýšila o 22 % na 88 %.

4.7.4 Úloha 4 – Kosodélník a trojúhelník

4. Vypočítejte obsah:

a) trojúhelníku *BCE*,

b) kosodélníku *ACDF*.



Obsah trojúhelníku BCE je: ____________________________

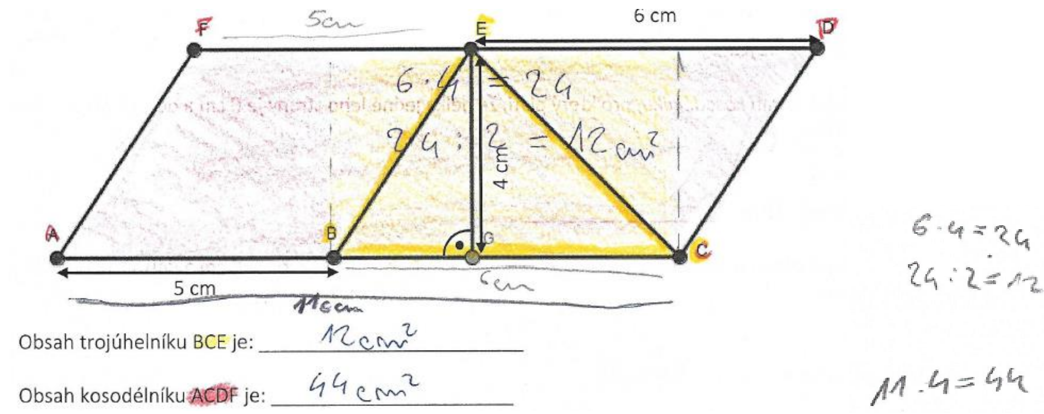
Obsah kosodélníku ACDF je: __________________________

Obrázek 4.86: Zadání úlohy 4

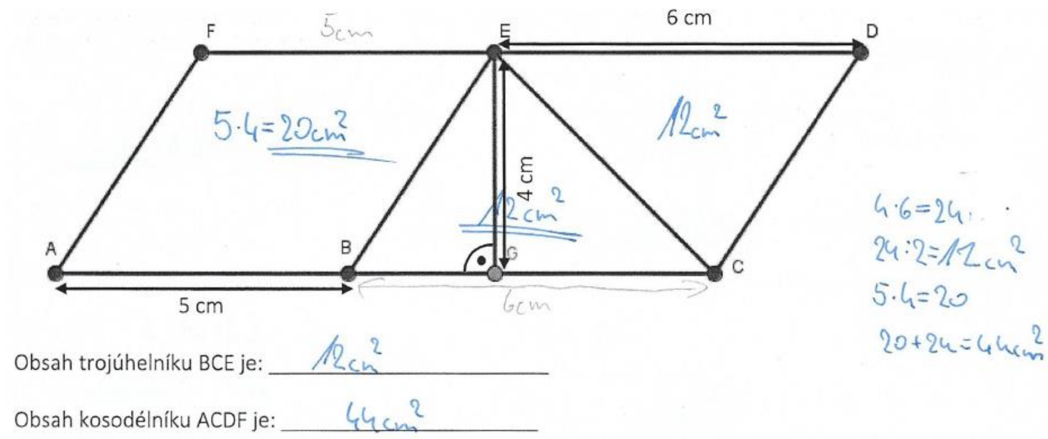
Úloha 4 měla za cíl prověřit porozumění vztahům o obsahu kosodélníku a trojúhelníku. V úloze byly záměrně zadány rozdílné délky úseček *AB* a *BC* tak, aby žák musel prokázat svou schopnost vyčíst z obrázku údaje potřebné pro výpočet, eventuálně je doplnit na základě obecných vlastností útvarů.

Tato úloha se ukázala jako nejméně úspěšná v rámci celého post-testu a ukázal se v ní největší rozdíl mezi výsledky obou tříd. Zatímco úspěšnost v 7. C byla poměrně vysoká – 69 % (18 žáků ze třídy nalezlo obsah trojúhelníku, 15 žáků obsah kosodélníku, 14 žáků oba obsahy). V 7. B se podařilo úlohu kompletně vyřešit pouze 26 % žáků (5 žáků ze třídy nalezlo obsah trojúhelníku, 6 žáků obsah kosodélníku, pouze 4 žáci oba obsahy). Uvažoval jsem nad tím, proč došlo až k takovému rozdílu mezi výsledky. V 7. B si žáci chybějící údaje zjišťovali měřením a dělalo jim problém využít pouze vlastností útvarů k doplnění chybějících parametrů. Tato nutnost měřit poukazuje na malou zkušenost s prací s náčrtkem a ukazuje na to, že žáci dobře nerozlišují prostor *geometrických objektů a vztahů* („theoretical“), kde jsou činnosti žáka zaměřené na práci s ideálními objekty a *prostor prostorově-grafických entit* („spatio-graphical“), do kterého spadá zejména měření, rýsování, kreslení do obrázku apod. (Laborde, 2005). Vysoká úspěšnost v rámci 7. C je podle mě podpořena právě zkušeností s hledáním chybějících parametrů v nákresu. Žáci v 7. C se s podobnými úlohami setkávali již na prvním stupni. Jako příklad uvádím úlohu na obrázku 4.1 v oddíle 4.2.2.1.

Co se týká správného řešení, pro zdárné vyřešení této úlohy bylo potřeba nalézt délku strany *AC,* respektive *FD* a následně nalézt výšku a tyto údaje dosadit do vztahu. Úloha se též dala řešit graficky a pro její řešení bylo možné využít stejných postupů jako v předchozí úloze 4.7.3., čehož využila i žákyně, jejíž řešení je na obrázku 4.87. Žákyně hledala obsah trojúhelníku *BCE* jako polovinu obsahu obdélníku, který je v obrázku naznačený. Obsah kosodélníku vypočítala podle vzorce. Jak je zároveň vidět, pro získání potřebného parametru 11 cm využila vlastnosti rovnoběžnosti protějších stran a doplnila chybějící délky úseček *FE* a *BC*.



Obrázek 4.87: Řešení úlohy 4 s využitím doplnění na obdélník

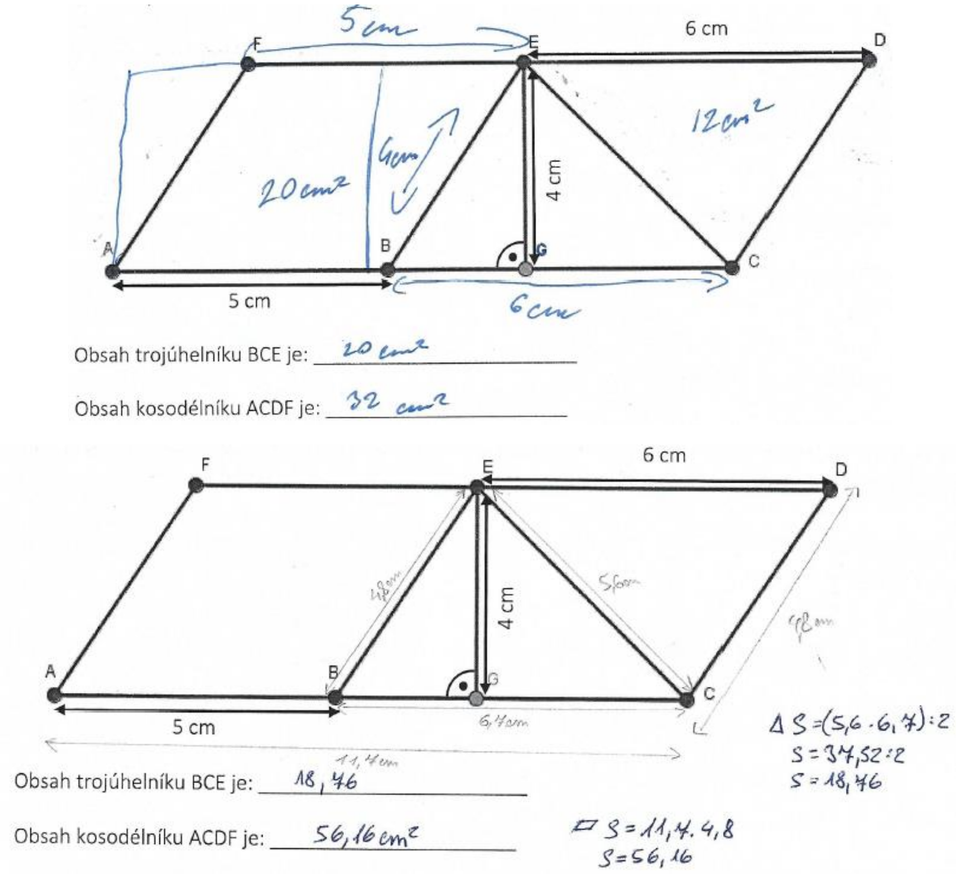


Obrázek 4.88: Jiné řešení úlohy 3

Obrázek 4.88 znázorňuje jiný způsob řešení obsahu kosodélníku *ACDF*. Žákyně zde celkový obsah nalezla jako součet obsahů kosodélníků *ABEF* a *BCDE*. Zde je vidět uvědomění konzervace míry a využití mezivýsledku pro řešení zbytku úlohy.

Nejčastější chybou při řešení úlohy bylo počítání s chybnými parametry, ale podle správného vztahu. Konkrétně se jednalo o určení špatných délek úseček *FE* a *BC.* Žáci v tomto případě nezaznamenali rozdílné délky. Obsah trojúhelníku poté vycházel 10 cm^2 a obsah kosodélníku 40 cm^2 (pokud žák bral délku úsečky *AC* 10 cm) nebo 48 cm^2 (v případě délky *AC* 12 cm). V pěti případech z obou tříd byl obsah kosodélníku počítán dle vztahu „strana krát strana." Výsledný obsah byl poté roven 55 cm^2. V 7. B byl ve třech případech počítán obsah trojúhelníku podle vztahu pro obsah rovnoběžníku. Žáci správně odhalili délku strany a výšku, ale výsledný součin těchto dvou hodnot zapomněli vydělit dvěma.

V chybných výpočtech se opět objevila i záměna obsahu a obvodu. Dále ve dvou případech žáci využívali k výpočtu naměřené hodnoty z obrázku, které dosadili do správného vztahu. Dvakrát se opět objevil obsah vypočítaný jako součin tří hodnot.



Obrázek 4.89: Dvě ukázky chybných řešení úlohy 4

4.7.5 Úloha 5 – Podlaha v chodbě

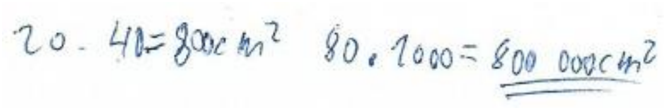
5. Podlaha chodby je beze zbytku pokryta obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 20 cm × 40 cm, kterých je přesně 1000. Jaký obsah má podlaha chodby?
(*spáry mezi dlaždicemi zanedbejte; nakreslete si například, kolik dlaždic je potřeba na pokrytí 2 m² podlahy; výsledek zaokrouhlete na celé číslo*)

Obrázek 4.90: Zadání úlohy 5 (Botlík, Souček, 2011)

Úloha číslo 5 byla do testu umístěna zejména pro potřeby hodnocení účinnosti výuky v oblasti reedukace obsahů základních rovinných útvarů – čtverce a obdélníku, a zároveň pro potřeby srovnání výsledků post-testu s výsledky českých žáků.

Závěrečná úloha je zaměřena především na výpočet obsahu obdélníku. Úspěšnost této úlohy v testování *Kalibro* 2010/11 pro 7. ročník činila pouhých 23 % (Botlík, Souček, 2011). I proto je zajímavé vidět, že v rámci post-testu byla úspěšnost úlohy v 7. C 83 % a v 7. B 64 %. V obou třídách se dají výsledky považovat za nadprůměrné. Pouze tři žáci tuto úlohu vynechali.

Výsledek 80 m^2, respektive 800 000 cm^2, nalézali žáci nejčastěji způsobem, který je na obrázku 4.91.



Obrázek 4.91: Správné řešení úlohy 5

Co se týká chyb, převody jednotek byly jejich zdrojem v pěti případech. Ve výsledcích se dvakrát objevil výsledek 80 000 cm^2, dále ve stejném počtu výsledek 800 cm^2 a současně jedenkrát výsledek 8 000 m^2. V případě druhého výsledku jsou možné dva důvody, proč žáci chybovali. V první řadě zapomněli vynásobit výsledek počtem dlaždic, jak je například vidět na obrázku 4.92, v druhém případě udělali chybu v zmiňovaných převodech. Důležité je podotknout, že řešení samotné se obešlo i bez převodů.

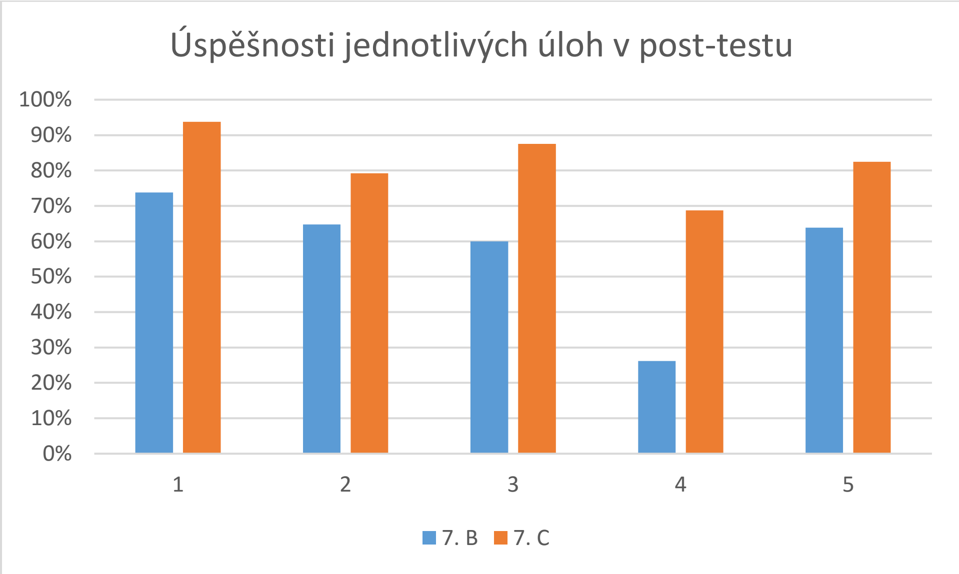
Obrázek 4.92: Chybné řešení úlohy 5

Další tři výsledky, jejichž zdroj se mi nepodařilo identifikovat, činily hodnoty 12,5; 100 a 20. Obecně v této úloze, pokud ji žáci řešili, byla chybovost velmi malá. Nápověda, která byla v originální úloze zadána a kterou jsem převzal i do zadání post-testu, bych považoval spíše za matoucí. Je samozřejmě otázka, zda to nebylo záměrně. Žáci se mě totiž v průběhu testu ptali, zda mají vyřešit první, nebo druhou úlohu. Já jsem odvětil, že informace v závorce slouží jako nápověda. Žáci zadání a nápovědu vnímali spíše jako dvě oddělené úlohy, tak jsem v jednu chvíli řekl, že důležité je odpovědět na to, na co se v zadání skutečně ptají. Při příštím zadávání bych se „nápovědě“ v zadání raději vyhnul.

4.7.6 Celkové výsledky a výstupy z post-testu

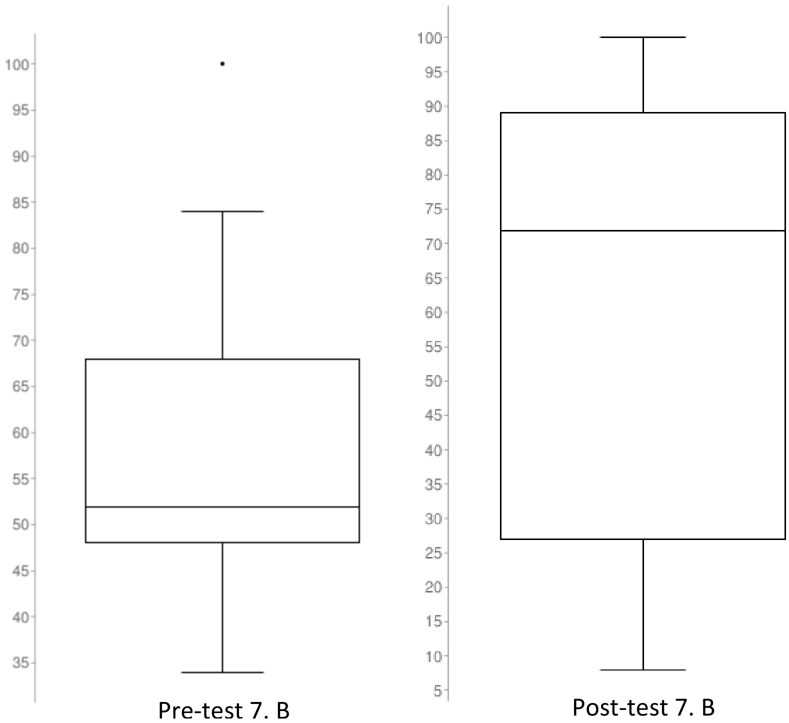
V tomto oddíle představím souhrnné výsledky celého post-testu a porovnám je s výsledky testu vstupního. V grafu 4.3 jsou vidět procentuální úspěšnosti řešení jednotlivých úloh. Připomínám, že v třídě 7. C se testování zúčastnilo 24 žáků a ve třídě 7. B 21 žáků. Jak je z grafu patrné, úspěšnost všech úloh v 7. C je relativně vysoká a průměrné výsledky vyrovnané. Průměrná úspěšnost v rámci třídy se nepatrně zvýšila ze 79 % na 82 %, což svědčí o tom, že žáci nové téma dobře přijali a uchopili. Ve třídě 7. B jsou procentuální úspěšnosti znatelně nižší a navíc u úlohy 4 došlo k velkému rozdílu mezi oběma třídami, z největší pravděpodobností zapříčiněného malou zkušeností žáků s doplňováním a hledáním údajů v náčrtcích a nákresech. Důležitým faktem ovšem je, že celková průměrná úspěšnost ve třídě 7. B se zvýšila z 58 % na 60 %, což mimo jiné svědčí o faktu, že žákům se výsledky nezhoršily ani po tom, co k výuce obsahů nebyly využívány algebraické vzorce, které zpočátku vyžadovali.

Graf 4.3



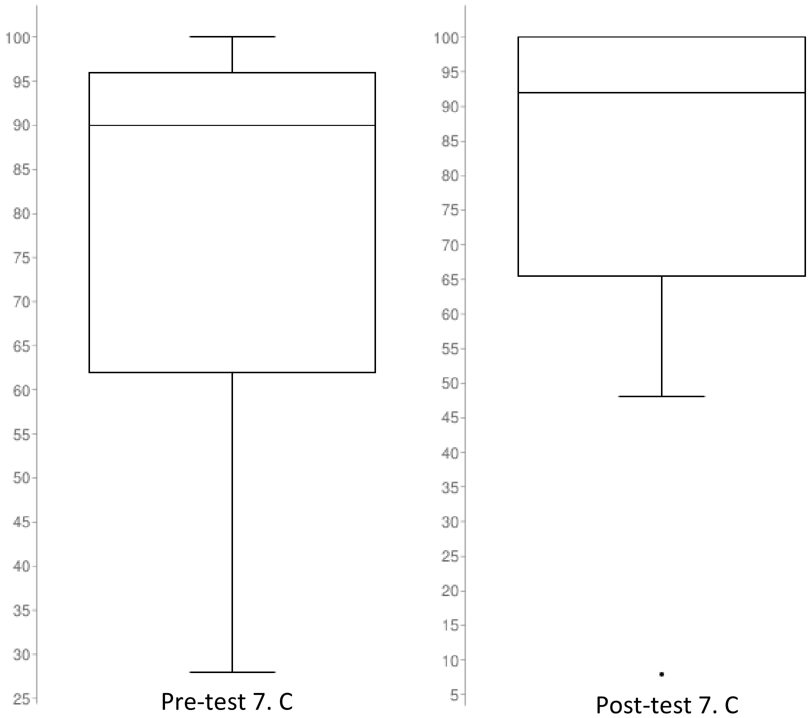
Po zhlédnutí procentuálních výsledků se může zdát, že změny v úspěšnostech jsou malé. Ovšem pokud je pro prezentaci výsledků použitý krabicový graf, stejně jako při prezentaci výsledků v oddílu 4.3.6, je vidět zásadní rozdíl. Porovnám tedy s pomocí krabicových grafů, do jaké míry se výsledky v daných třídách změnily.

Graf 4.4: Rozdělení úspěšností v pre-testu a post-testu u žáků 7. B



Levá část grafu 4.4 znázorňuje rozložení výsledků žáků v rámci pre-testu. Vpravo je možné vidět výsledné rozložení výsledků post-testu. Levé stupnice krabicových grafů znázorňují procentuální úspěšnost žáků při řešení testu. Ze znázornění výsledků post-testu je možné vidět, že se v 7. B výsledky vyskytovaly mezi 8–100 %. Hlavní zlepšení je vidět hlavně v posunu střední hodnoty (mediánu) z 52 % na 72 %, což znamená, že polovina žáků měla úspěšnost vyšší nebo rovnu 72 %. Dalším pozitivním faktem je, že čtvrtina žáků z celé třídy měla výsledky mezi 100 až 90 % a čtvrtina mezi 89-72 %. Zbývající polovina třídy měla dosažené výsledky pod hranicí 72 %, z nichž ve 4 případech byl výsledek pouhých 20 % a v jednom případě 8 %.

Graf 4.5: Rozdělení úspěšností v pre-testu a post-testu u žáků 7. C



V 7. C se výsledky pohybovaly mezi 47–100 % s jedním výskytem 7% výsledku znázorněného v grafu tečkou. I když na rozdíl od 7. B medián zůstal na téměř stejné hodnotě, došlo i tak ke znatelně změně. Jak je vidět v grafu 4.5, rozsah úspěšností v rámci post-testu se zmenšil a posunul směrem nahoru. Horní část nad střední krabicovou částí úplně chybí, což svědčí o faktu, že čtvrtina žáků dosáhla 100% výsledku bez jediné chyby a další čtvrtina výsledků mezi 99–92 %. Dalších 25 % výsledků žáků se vyskytovalo mezi 91–66 %. Poslední čtvrtina dosáhla výsledků nižších než 65 %. Je důležité zmínit, že v této třídě měli menší než poloviční úspěšnost pouze dva žáci. V jednom případě byl výsledek 48 % a v druhém 8 % (v druhém případě se jedná o žákyni s diagnostikovanou dyslexií a dysgrafií navíc s velmi pomalým pracovním tempem).

Celkové výsledky opět dokreslují rozdílnost obou tříd a korelují s průběhem experimentální výuky samotné a s tím, jak byly vztahy pro obsahy postupně odhalovány. Podle mého názoru by bylo nutné věnovat větší čas prohlubování generického modelu zejména v 7. B, kde generický model objevila pouze menší část žáků. Široká škála výsledků ukázala, že skupina je z hlediska znalostí silně heterogenní. Výuka v této třídě by měla být i nadále individualizována, protože jsou v ní žáci, kteří učivo již ovládají, ale stále jsou tam i takoví, kteří pojmu obsah nerozumí. Ve třídě by tedy měly být zadávány gradované úlohy s různou kognitivní náročností. Pro silnější žáky jsou vhodné například úlohy s větším počtem kroků vedoucích k nalezení řešení, eventuálně úlohy na zobecňování. Žáci by si případně úlohy mohli vzájemně tvořit. Slabší žáci by i nadále měli pracovat se čtvercovou sítí a pokusit se v ní hledat možné závislosti. Důležité je dodat, že žáci, kteří dosáhli slabšího výsledku v post-testu, se podobnými výsledky prezentují i v rámci standardních hodin matematiky. Dva z nich byli v pololetí klasifikováni dokonce stupněm čtyři. Rád bych také podotkl, že v rámci žákovských řešení se objevilo znatelně menší množství algebraických vzorců než v pre-testu a žáci řešili úlohy spíše úvahou; to považuji za slibný výsledek.

Menší rozptyl výsledků v 7. C svědčí o větší homogennosti skupiny z hlediska vědomostí a dovedností. Způsoby řešení úloh v této třídě jsou ovšem různorodé. Na základě analýzy řešení je též vidět, že žáci se nebojí experimentovat a že i v případě, že zcela neovládají generický model, půlí útvary, dokreslují do nich čáry a hledají jiný způsob, jak získat výsledek. To je i jeden ze zásadních rozdílů oproti 7. B. V 7. C se zároveň nevyskytoval nikdo, kdo by hledal obsahy trojúhelníků jako součin tří hodnot, což považuji za velice důležité. Obecně má tato třída dobrou představu o obsazích, což odráželo i snazší cestu při odhalování generického modelu.

4.8 Kvalitativní hodnocení výuky a navrhované změny v plánu výuky

Kvantitativní výsledky hodnocení nejsou jediným kritériem, dle kterého by se měla hodnotit kvalita výuky. Je to nejen na základě podnětnosti daného přístupu, ale také na konkrétních rozvíjených kompetencích. Závěrem tohoto oddílu navrhnu některá doporučení pro případnou opakovanou realizaci přístupu nastíněného v této práci.

4.8.1 Hodnocení experimentální výuky

Téma nebo konkrétněji způsob, jakým žáci zjišťovali obsahy trojúhelníků a rovnoběžníků, byl pro ně sám o sobě velice motivující. Nasvědčovala tomu již od samého začátku produktivní pracovní atmosféra. Byl jsem překvapen zejména vysokou aktivitou žáků a tím, s jakým zájmem se většina dala do práce. První tři vyučovací hodiny v obou třídách byly věnovány výhradně manipulativní činnosti a práci s papírovými modely obrazců. Žáci zjišťovali o útvarech co nejvíce informací a odhalovali jejich společné vlastnosti. Zájem žáků o tuto práci se projevil zejména na časovém plánu, který zcela neodpovídal původním odhadům. V 7. C se například aktivita 4.4.1.1 prodloužila z plánovaných 10 minut na 30 minut a v 7. B této aktivitě byla věnována celá hodiny.

Žáci stále dodávali nové a nové podněty, které bylo potřeba okomentovat nebo vyvrátit formou diskuse. Původně jsem nepředpokládal, že zjistí tak velké množství informací právě o rovnoběžníku. Některým žákům se podařilo v rámci úvodní aktivity odhalit například vztahy pro úhly v rovnoběžníku, ale také nalézt součet úhlů v čtyřúhelníku. V průběhu stejné aktivity dále přetvářeli rovnoběžník na trojúhelník s pomocí stříhání. Aktivita svým nejednoznačným zadáním ve výsledku poskytla daleko větší množství řešení, než jsem původně předpokládal. Žáci začali rovnoběžníky překládat a střihat útvary v několika vrstvách, někteří z nich, kterým se podařilo nalézt správně řešení, navíc dobrovolně řešili i výzvu uvedenou na tabuli.

Nepředpokládal jsem, že už v první hodině žáky napadne počítat obsah útvaru. Ze začátku se ihned objevilo očekávané špatné řešení obsahu výpočtem „strana krát strana“ uvedené jako jeden z problémů v oblasti míry zmiňovaný v oddíle 2.3.3. V 7. C byl vzápětí nalezen i správný postup. V 7. B tomu tak nebylo. Naštěstí vzhledem k budoucímu budování poznatku se mi v obou třídách podařilo žáky znejistit svým pochybováním nad oběma postupy a tím je přinutit ještě k dalším experimentování. Považoval jsem za velice důležité, aby právě fáze objevování nebyla tak rychle přeskočena a navíc, aby řešení „strana krát strana“ bylo na základě pádných argumentů vyvráceno.

Práce ve skupinách se v dalších aktivitách ukázala jako velice účinný nástroj pro odhalování závislostí, který vyžadoval velké množství času. Dobu věnovanou právě manipulativní činnosti a efektivní skupinové práci nepovažuji za promarněný čas. Tato práce rozvíjí nejen matematické myšlení, ale zejména kompetence uvedené v RVP ZV označené jako klíčové a které i já považuji za nezbytné pro vhodné pracovní a bezpečné klima. Jedná se o kompetence komunikativní (diskuse ve skupině), k řešení problémů (plnění zadaného úkolu), k učení (hledání nových závislostí a poznatků), pracovní (práce s pomůckami na základě předem stanovených pravidel), sociální a personální (spolupráce ve skupině, ovládání se), občanské (respektuje názor druhého, pomáhá). V průběhu řešení nenastal žádný větší problém s rozdělením skupin nebo se skupinovou spoluprací. Žákům se dařilo plnit zadané úkoly a u většiny z nich bylo vidět jisté nadšení a touha po dokončování zadaných úkolů nebo problémů. Nejvíce se tato motivace žáků projevila při plnění aktivity „skládačka,“ kterou jsem bohužel z časových důvodů musel v obou třídách přerušit, takže všechny skupiny práci nestihly. Podstatný cíl této aktivity – vidět, jak se útvary překrývají a jak jsou propojeny jejich obsahy – byl splněn v obou třídách. Na základě této zkušenosti se v 7. C objevil velice rychle náznak generického modelu, již podložený relevantním komentářem, bohužel v té chvíli žáky nebyl ještě přijat, což dokladovalo nedostatečné zkušenosti s izolovanými modely. Třída 7. B, která generický model neobjevila, využila alespoň poznatků získaných na základě překrývání obrazců. Podařilo se jim tak nalézt obsahy tří obrazců ze čtyř navržených bez využití generického modelu. V 7. B došlo ve fázi prezentace dosažených výsledků aktivity „skládačka“ k nečekanému momentu a asi pro mě nejsilnějšího z celého experimentu. Ve chvíli, kdy aktivitu přerušilo zvonění a na tabuli se neobjevil správný výsledek a ani nevyvrátil špatný, někteří žáci zůstali o přestávce u tabule a chtěli úlohu za každou cenu dořešit, což se jim po několikaminutové diskusi a kreslení do obrázku nakonec podařilo. Tento moment reprezentoval silné žákovské odhodlání a motivaci proniknout do hledaného problému. Dle mého názoru jsou právě tyto okamžiky výsledkem vhodně volených úloh a také vyvrací tvrzení některých učitelů, že žáky v dnešní době nic nezajímá. S odkazem na principy podnětné výuky uvedené v oddíle 2.1 a v publikaci (Vondrová, 2014) je tato situace dokladem toho, že se mi podařilo „probudit zájem dětí o matematiku, předložit žákům podnětné prostředí, podporovat žákovský aktivní přístup k získávání poznatků, rozvíjet schopnost samostatného a kritického myšlení v matematice“.

Dalším účinným prostředkem pro odhalování závislostí byla beze sporu čtvercová síť a gradované série úloh v ní, osvědčila se zejména aktivita doplňování trojúhelníků na rovnoběžníky přidáním maximálně jednoho vrcholu. Žáci v 7. C sami a žáci v 7. B s drobnou dopomocí právě při práci se čtvercovou sítí objevili souvislost mezi stranou a k ní příslušnou výškou. Čtvercová síť navíc umožnila i hledání jiných postupů, které využívaly například komplementu útvaru nebo snazší dělení útvarů na jiné podobné či snadněji spočitatelné obsahy útvarů. Obecně se při samostatné práci s čtvercovou sítí výuka silně individualizovala. Každý žák si v úlohách našel své a věnoval se jiným úlohám. Zejména při této práci byl ve třídě k mému překvapení absolutní klid.

Práce s komplementem útvaru napomohla v průběhu řešení těchto úloh spontánnímu odhalení podstaty výšky. Jak bylo patrné zejména v oddíle 4.6.3, žáci chápali pojem výška spíše intuitivně ve významu vzdálenosti. Většina z nich ještě postrádala konkrétní propojení mezi výškou jako vzdáleností a výškou v trojúhelníku, respektive rovnoběžníku. V rámci tématu konstrukčních úloh by se pozornost měla soustředit právě na podpoření konceptualizace termínu výška a jeho zpřesněnou definici. V rámci hledání obsahů trojúhelníků a rovnoběžníků se mi nezdálo důležité žáky za každou cenu opravovat a nutit je k přesné definici výšky, když byli schopni bezchybně úlohy vyřešit. Pojem výška, stejně tak jako každý jiný pojem v matematice, je také výsledek nějakého procesu – buduje a zpřesňuje se postupně. Není tedy dle mě nutné do žáků „nalít“ vše, naopak si myslím, že postupná konstrukce poznatku umožňuje jeho hlubší porozumění. Navíc to byli právě žáci, kteří cítili potřebu něco jako výšku zavést, což pro mě bylo to nejpodstatnější.

I přes slabší výsledky 7. B v rámci post-testu jsem zaznamenal zásadní posun zejména v argumentaci a její hloubce během experimentálních hodin, ale také v častějším zapojení některých slabších žáků do výuky. Navíc pro mě jedním z nejdůležitějších faktorů byla i klidná a produktivní skupinová spolupráce, které jsem se i vzhledem k diagnostikované šikaně v této třídě obával. Navíc byla vidět i ochota žáků podílet se na průběhu hodiny, které jsem si vážil.

Poslední část výuky, věnovaná zejména řešení aplikačních úloh k posílení budovaného vztahu, pro mě, jako pro učitele, byla opět poučná v tom směru, že část věnovaná manipulaci a zvýšená časová náročnost byla patrná i v řešení úloh. Žáci, kteří neměli zafixovaný generický model, využívali komplementu k řešení úlohy, dělili útvary a nacházeli různá netradiční řešení.

Pokud bych měl v několika slovech shrnout pozitiva zvoleného přístupu k výuce a jeho specifika a to, proč mi daný přístup vyhovuje, shrnul bych ho následujícími slovy: aktivní práce žáka, skupinová práce, příjemné pracovní klima pro žáka i učitele, diskuse, objevování, různorodé úlohy, argumentace, rozmanitá žákovská řešení, individualizace, manipulace a práce s pomůckami, učení v souvislostech, úlohy s reálným základem, podstata, otevřenost výuky.

4.8.2 Navrhované změny v plánu výuky

Myslím si, že celý plán byl zcela podhodnocen z časového hlediska, na každou z aktivit 4.4.1.1, 4.4.1.2, 4.4.2.1 a 4.4.2.2 je pro další realizaci nutné počítat alespoň s jednou vyučovací hodinou. Manipulativní práce a stříhání zabere větší množství času. Zároveň bych doporučil podrobněji promyslet doplňující otázky a nějaké úkoly, které mohou dělat skupiny nebo jednotlivci, kteří již společnou práci dokončili. Při prezentaci výsledků by měl být kladen ještě větší důraz na ukazování konkrétních geometrických objektu jako např. vrchol, strana, úhlopříčka apod.

Dalším problémem bylo nedůsledné rozdělení čtyřúhelníků na rovnoběžníky (eventuálně ještě na pravoúhelníky) a lichoběžníky. Velice často se žákům pletla právě tato terminologie. Do výuky bych v reakci na to zařadil nějakou přehledovou tabulku, kterou by žáci doplnili a ve které by si zopakovali názvy a vlastnosti jednotlivých útvarů.

Úloha 4.4.3.2 nebyla v rámci výuky použita. Rozhodně bych ji z plánu neodstraňoval, protože je možné, že žáci výšku spontánně neobjeví. V takovém případě bych úlohu a zejména diskusi nad ní zařadil.

Pro zdatnější žáky bych připravil některé úlohy navíc, kde se budou vyskytovat nejen údaje v desetinných číslech, ale také ve zlomcích tak, aby docházelo k postupnému zobecňování od přirozených čísel k číslům reálným. Zařadil bych rozhodně do výuky ještě minimálně jednu hodinu, kde by byly úlohy zaměřené především na počítání s jinými než přirozenými čísly, aby žáci neměli zafixováno, že obsah vychází vždy jako přirozené číslo.

Úloha 4.4.3.1 byla původně plánována jako skupinová práce, ale osvědčila se i její aktualizovaná verze představená v oddíle 4.6.4. Navrhl bych nejdřív úlohu řešit bez údajů a poté žákům dát právě podobnou úlohu již s některými doplněnými parametry.

5 Závěr

Ve své práci jsem se zabýval konstruktivistickými přístupy k výuce obsahů trojúhelníku a rovnoběžníku. Dle mě se jedná o důležitou část matematiky na základní škole, která bývá často redukována na znalost algebraických vzorců a na numerické výpočty. Tomuto tvrzení nasvědčují i neuspokojivé výsledky českých žáků v rámci výzkumů zaměřených na tuto oblast geometrie. Jsem přesvědčen, že tento problém může být způsoben nedostatečným didaktickým zpracováním tohoto tématu, malou rozmanitostí nabízených problémů, nedostatečným propojováním témat v geometrii, ale také přístupem učitelů k výuce samotné. Někteří moji kolegové tvrdí: „Ty dnešní žáky nic nebaví a hloupnou." S názory tohoto typu nesouhlasím. Myslím si, že současní žáci pouze v hodinách nemají mnoho prostoru pro seberealizaci a žijí v málo podnětném prostředí. Tvrdím, že jeden z účinných kroků vedoucích ke zkvalitnění výuky a ke zvýšení zájmu o matematiku spočívá právě ve větším prostoru k experimentování a v dostatečně podnětných úlohách vedoucích k objevování nových souvislostí.

Pro podporu těchto tvrzení jsem nejprve zkoumal učebnice využívané k výuce matematiky na prvním stupni základní školy a jednu učebnici druhého stupně běžně využívanou k výuce tématu obsahů. Dále jsem naplánoval a následně realizoval podnětnou výuku ve dvou třídách 7. ročníků základní školy s odlišnou zkušeností s výukou matematikou na prvním stupni. Výuka byla zaměřena na výuku obsahů trojúhelníků a rovnoběžníků. Byla zaznamenávána na videokameru a následně analyzována. Tato analýza a popis výuky zabírá největší část práce. Jedna třída byla na prvním stupni vzdělávána silně instruktivní metodou dle učebnic podobného charakteru a druhá naopak podle myšlenek konstruktivismu. Právě analýza dvou řad učebnic využívaných na prvním stupni základní školy poukázala na některé faktory ovlivňující s vysokou pravděpodobností právě pojmotvorný proces v oblasti míry.

Jako velká výhoda konstruktivisticky orientovaných učebnic se jeví představování učiva v různých úlohách, souvislostech, rozdílných prostředích a kontextech. Nechybí velké množství motivačních úloh a problémů. Úlohy jsou stupňované dle obtížnosti, což nabízí žákům větší možnost seberealizace dle individuálních možností. Témata se v rámci učebnic na prvním stupni cyklicky vrací a učivo se v nich průběžně prohlubuje. Instrukcí a rámečků s návody je přítomno jen velmi málo. Naopak v instruktivně pojatých učebnicích se jednalo o šablonovitě tvořené úlohy s minimální vazbou na reálné problémy a leckdy zaměřených pouze na reprodukci na základě úvodních příkladů, rámečků s nápisy pozoruj, počítej apod. Chyběly motivační úlohy a úlohy sloužící k individualizaci výuky nebo úlohy s větším množstvím řešení. Obecně chybělo více reprezentací jednoho konceptu. Tyto učebnice vedou dle mě k průměrnosti a žáka nijak nemotivují k přemýšlení. Poznatky jsou předány formou sdělení v rámečcích. Podobné instruktivní rysy se objevily i v učebnici využívané na druhém stupni základní školy, dle které bych měl standardně téma obsahů trojúhelníků a rovnoběžníků učit. I proto jsem od ní upustil a materiály pro výuku jsem tvořil sám na základě inspirace z českých a zahraničních zdrojů.

Hlavním cílem práce bylo navrhnout jednu z možných koncepcí metodiky tématu obsahů rovnoběžníku a trojúhelníku, která by eventuálně mohla posloužit jako zdroj inspirace pro další učitele. Vzniklá příprava byla ovlivněna výsledky pre-testů, které jsem zadal před zahájením experimentální výuky a analyzoval je. V instruktivně vedené třídě se jako klíčový problém ukázala až přílišná fixace na algebraické vzorce a také nedostatečné zkušenosti s řešením úloh v oblasti míry. Početní úkony byly odděleny od geometrické reprezentace. Příprava tedy počítala kromě výuky nové látky i s reedukací obsahů základních útvarů a prohlubováním stávajících znalostí v oblasti míry. Do výuky byly zařazeny zejména aktivity využívající manipulace, skupinové práce, diskuse, gradované úlohy, ale také úlohy aplikační sloužící k procvičování. Ve výuce jsem využíval ve většině aktivit práci se čtvercovou sítí. Právě zmiňované způsoby práce se v průběhu experimentální výuky ukázaly jako velice efektivní a zejména motivační. Právě motivace měla zásadní roli ve výuce. Už první aktivita ukázala, že pokud učitel nechá žákům volné pole působnosti, výsledky stojí zato. Žáci během první hodiny s pomocí manipulace s papírovým rovnoběžníkem objevili vlastnosti rovnoběžníku, které jsou v učebnici pro druhý stupeň procvičovány v mnoha kapitolách. Někteří sami o sobě začali plnit úlohy navíc dobrovolně. Pracovní atmosféra v průběhu celé výuky byla v obou třídách uvolněná a žáci neměli problém se soustředěním ani s chováním. Ukázalo se, že podnětný způsob funguje i ve třídě, kde žáci na tento způsob práce nebyli zvyklí. Situace, kdy skupina žáků dokázala strávit přestávku u tabule a hledat správné řešení při hodině nedokončené úlohy, dokladuje fakt, že pokud jsou žáci motivováni podstatou úlohy nebo situací, tak se pro ně matematika stává zajímavou. Tento moment byl i pro mě nejsilnějším okamžikem celé výuky (oddíl 4.6.2.2). Celková atmosféra nakloněná objevování umožnila většině žáků v obou třídách objevit generický model pro výpočet obsahu, ve třídě vedené Hejného metodou již na prvním stupni k tomuto objevu došlo zcela spontánně bez mého zásahu.

Průběh objevování i kvalita generického modelu byly ve třídách odlišné (oddíl 4.6). Nepovažuji to ovšem za neúspěch nebo nevýhodu, ba naopak. Za nejdůležitější považuji to, že k objevení vztahů vůbec došlo a hlavně, že to byla z největší části práce žáků samotných. Důležité je pro mě také to, že to byl čas strávený skutečně efektivní prací žáků a přemýšlením nad úlohami.

Na základě analýzy post-testu se ukázalo (oddíl 4.7.6), že procento úspěšných žáků při řešení úloh zaměřených na plošnou míru se v obou třídách znatelně zvětšilo. Navíc došlo i k viditelné reedukaci konceptu obsahu. V původně méně úspěšné třídě rapidně ubyly reprezentace vztahů algebraickými vzorci a procedurální řešení, což považuji za velice slibný výsledek. V této třídě to dokonce považuji za skvělý výsledek, protože si myslím, že je obdivuhodný vzhledem k předchozím malým zkušenostem žáků v této oblasti. I tyto výsledky potvrdily to, že závisí hlavně na motivaci žáků a rozmanitosti nabízených problémů.

Při příští realizaci bych rozhodně doporučil vyhradit větší časovou dotaci, protože manipulativní činnost, skupinová práce i diskuse zabírají poměrně velké množství času. Obecně si myslím, že pro toto téma je konstruktivistický přístup velice vhodný. Dokazuje to žákovské nadšení, touha objevovat a situace vedoucí k objevení generického modelu v průběhu experimentální výuky.

6 Seznam literatury

Bartsch, H.-J. (2006). *Matematické vzorce*. Praha: Academia. 832 s.

Battista, M. T. (2007). The developement of geometric and spatial thinking. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* Charlotte NC: Informatioon Age Publishing, p. 843–908.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., (2014a). *Matematika pro 4. ročník základních škol, 1. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., (2014b). *Matematika pro 4. ročník základních škol, 2. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Blažková, R., Matoušková, K., Vaňurová, M., (2014c). *Matematika pro 4. ročník základních škol, 3. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Blažková, R., Matoušková, K., Staudková, H., Vaňurová, M. (2010). *Matematika pro 3. ročník základních škol, 1. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Blažková, R., Matoušková, K., Staudková, H., Vaňurová, M. (2012). *Matematika pro 3. ročník základních škol, 2. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Blažková, R., Matoušková, K., Staudková, H., Vaňurová, M. (2014d). *Matematika pro 3. ročník základních škol, 3. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Botlík, O., Souček D. (2011). *Komentované výsledky projektu KALIBRO, školní rok 2010/11 – žáci 7. ročníku*. Praha: KALIBRO.

Breyfogle, M. L., Herbal-Eisenmann, B. A. (2005). Questioning Our Patterns of Questioning *Mathematics Teaching in the Middle School*, roč. 10, č. 9, s. 484-489.

Cachová, J., Stehlíková, N. (2006). Konstruktivistické přístupy k vyučování a praxe. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. 31 s. CD ROM.

Curry, M., Mitchelmore, M., Outhred, L. (2006). Development of children's understanding of length, area and volume measurement principles. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, p. 377–384. (16–21 July 2006 : Prague, Czech Republic)

Čech, E. (1955). *Počáteční studium vyučování geometrii*. Praha: VÚP.

Descartes, R. (1992). *Rozprava o metodě*. 3.vyd., 1.vyd.v nakl. Svoboda. Praha: Svoboda.

Hejný, M. (2004). Mechanizmus poznávacího procesu. In Hejný, M.; Novotná, J.; Stehlíková, N. (Eds.), *Dvacet pět kapitol z didaktiky matematiky*. Praha: PedF UK, s. 23–42.

Hejný, M. (2014). *Vyučování matematice orientované na budování schémat: aritmetika 1. stupně*. Praha: Univerzita Karlova v Praze – Pedagogická fakulta.

Hejný, M., Bomerová, E., Jirotková, D. (2010). *Matematika, učebnice pro 4. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Bomerová, E., Jirotková, D., Michnová, J. (2011). *Matematika, učebnice pro 5. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Jirotková, D. (2012). *Úlohy pro rozvoj matematické gramotnosti: utváření kompetencí žáků na základě zjištění šetření PISA 2009*. Praha: Česká školní inspekce.

Hejný, M., Jirotková, D., Michnová, J., Slezáková-Kratochvílová, J. (2009). *Matematika, učebnice pro 3. ročník základní školy.* Plzeň: Fraus.

Hejný, M., Kuřina, F. (2009). *Dítě, škola, matematika. Konstruktivistické přístupy k vyučování*. Praha: Portál.

Chrz, V., Slavík, J., Štech, S. (2013). *Tvorba jako způsob poznávání*. Vyd. 1. Praha: Karolinum, 556 s.

Justová, J. (2010a). *Matematika pro 5. ročník základní škol, 1. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Justová, J. (2010b). *Matematika pro 5. ročník základní škol, 2. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Justová, J. (2010c). *Matematika pro 5. ročník základní škol, 3. díl.* Praha: ALTER, 64 s.

Kadleček, J., Odvárko, O. (2014). *Matematika pro 7. ročník základní školy, 3. díl*. Praha: Prometheus, 100 s.

Kouřim, J., Kuřina, F., Šedivý, O. (1985). *Základy elementární geometrie: pro učitelství 1. stupně ZŠ.* Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 156 s.

Kuřina, F. (1975). Některé otázky vyučování geometrii pro 12-15leté žáky. *Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, roč. 20, č. 3, s. 161-164.

Kuřina, F. (2006). Geometrie jako příležitost k rozvoji žákovských kompetencí. In *Podíl učitele matematiky ZŠ na tvorbě ŠVP: Studijní materiály k projektu*. 1. vyd. Praha: JČMF, 2006. 43 s. CD ROM.

Kuřina, F. (2011). *Matematika a řešení úloh* [online]. [cit. 2016-04-22]. Dostupné z: http://class.pedf.cuni.cz/NewSUMA/FileDownload.aspx?FileID=149

Murphy, E. (1997). *Constructivism: From Philosophy to Practice* [online]. [cit. 2016-03-27]. Dostupné z: http://files.eric.ed.gov/fulltext/ED444966.pdf.

Palečková, J., a kol. (2001). *Třetí mezinárodní výzkum matematického a přírodovědného vzdělávání. Úlohy z matematiky a přírodních věd pro žáky 8. ročníku*. Replikace 1999. ČR: Ústav pro informace ve vzdělávání, Praha.

Polák, J. (2008). *Přehled středoškolské matematiky*. Praha: Prometheus, 659 s.

Rendl M., Vondrová, N. (2014). Kritická místa v matematice u českých žáků na základě výsledků šetření TIMSS 2007. *Pedagogická orientace*, roč. 24, č. 1, s. 22-57.

Sedláček, J. (1981). *Slovník školské matematiky*. 1. vyd. Praha: Státní pedagogické nakladatelství, 239 s.

Tomášek, V., et al. (2008). *Výzkum TIMSS 2007. Obstojí čeští žáci v mezinárodní konkurenci?* Praha: ÚIV

Vondrová, N. (2014). *Úvod do didaktiky matematiky*. Praha: Univerzita Karlova v Praze - Pedagogická fakulta. 65 s.

Vondrová, N. (2015). Obtíže žáků 2. stupně ve zjišťování obsahů útvarů a objemů těles. In Rendl M., Vondrová, N. a kol., *Kritická místa matematiky základní školy v řešeních žáků*. Praha: Univerzita Karlova, nakladatelství Karolinum, s. 253–318.

Vondrová, N., Žalská, J. (2013). Kritická místa matematiky na 2. stupni základní školy v diskurzu učitelů. In Rendl M., Vondrová, N. a kol., *Kritická místa matematiky na základní škole očima učitelů*. Praha: Univerzita Karlova v Praze, Pedagogická fakulta, s. 63–126.

Zormanová, L. (2012). *Výukové metody v pedagogice: tradiční a inovativní metody, transmisivní a konstruktivistické pojetí výuky, klasifikace výukových metod*. 1. Vyd. Praha: Grada, 160 s.

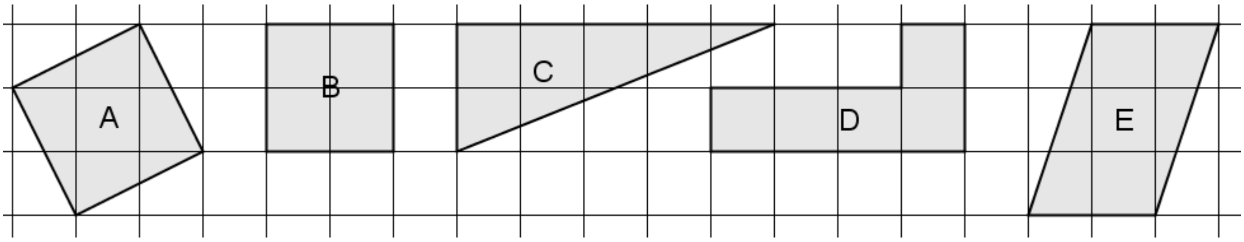
7 Přílohy

7.1 Zadání pre-testu

PRE-TEST Jméno: ___________________________

Obsahy rovinných útvarů Třída: ____________________________

1. **Na obrázku vidíte geometrické obrazce umístěné ve čtvercové síti. Každý čtverec čtvercové sítě má obsah 1 cm^2. Vypočítejte obsahy jednotlivých obrazců.**

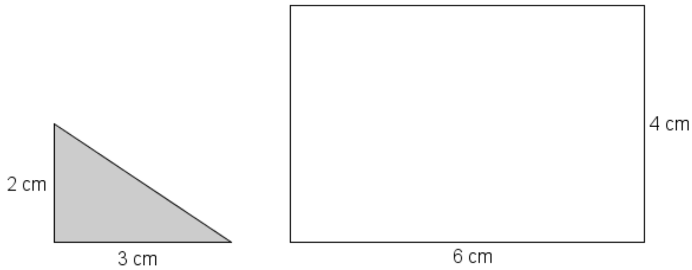


Obsah obrazce A: _____________________ Obsah obrazce B: _____________________

Obsah obrazce C: _____________________ Obsah obrazce D: _____________________

Obsah obrazce E: _____________________

2. **Kolik trojúhelníků shodných s vybarveným trojúhelníkem je potřeba k úplnému pokrytí plochy obdélníku? Vyznačte do obrázku.**



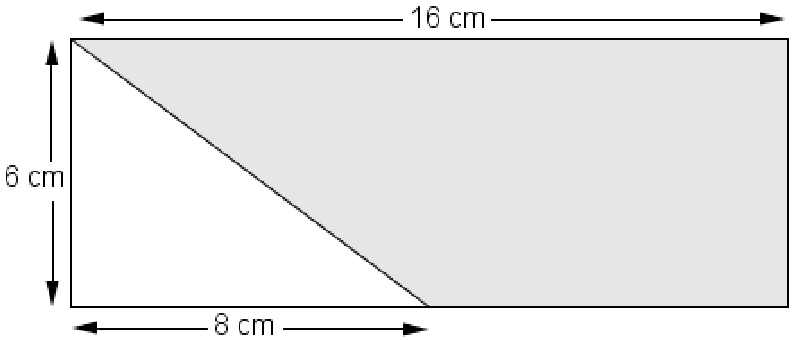
Odpověď: ____

3. **Vypočítejte obsah obdélníku, jestliže délka jedné jeho strany je 10 cm a délka jeho druhé strany je 6 cm.**

   Výpočet:

   Odpověď: ____

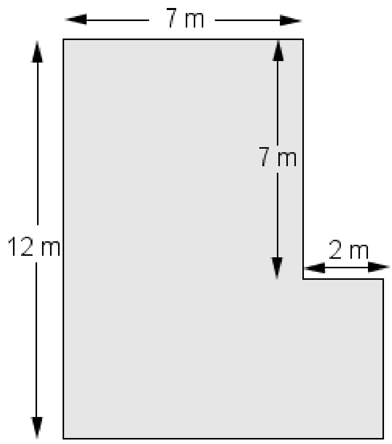
4. Kolik cm^2 je obsah vybarvené části obdélníku na obrázku?



Postup:

Odpověď: ____

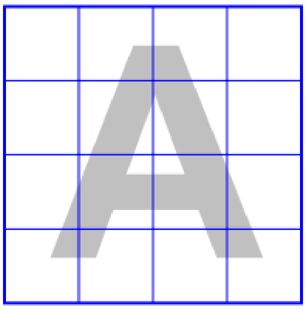
5. Erik chce koupit travní semeno na nový trávník do své zahrady. Jakou plochu bude třeba zatravnit? Plán zahrady vidíte na obrázku.

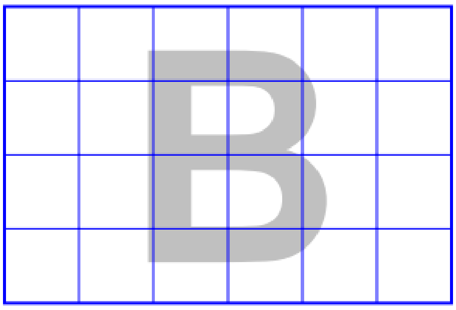


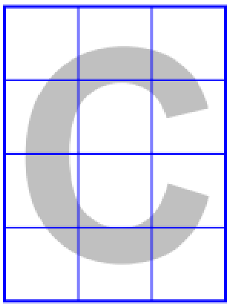
Postup:

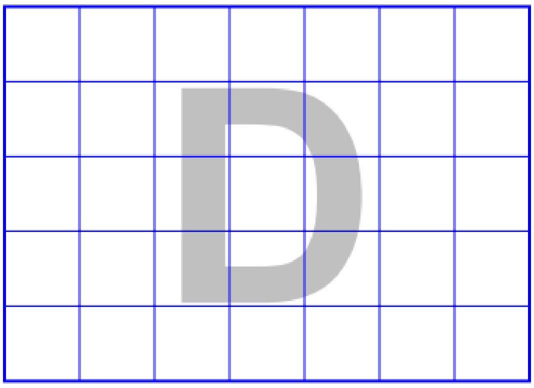
Odpověď: ____

7.2 Pracovní list – obsahy trojúhelníků









Začněte vystřižením čtyřúhelníků A-D.

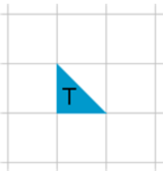
1) Nalezněte obsahy obrazců A-D.
2) Za použití pravítka narýsujte **úhlopříčku** u obrazce A.
3) U každého z obdélníků B,C a D vyznačte na **horní** straně **mřížový bod**, který není vrcholem. Za pomoci pravítka spojte rovnou čarou spodní vrcholy se zvoleným bodem.
4) Obrazce rozstříhejte podél dorýsovaných čar.
5) Doplňte tabulku. Co zajímavého vidíte?

	A	**B**	**C**	**D**
obsah obdélníku				
obsah odstřižených částí				
obsah zbylého útvaru				

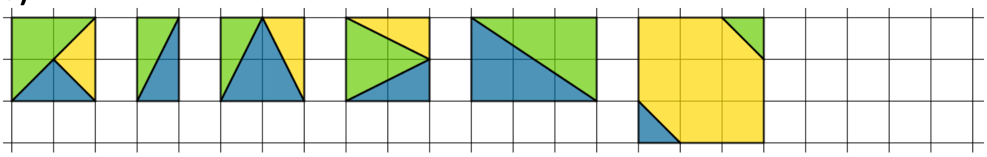
6) Ve skupině se dohodněte, jaký nejdůležitější poznatek z této aktivity chcete sdílet se třídou.

7.3 Pracovní list – obsahy ve čtvercové síti

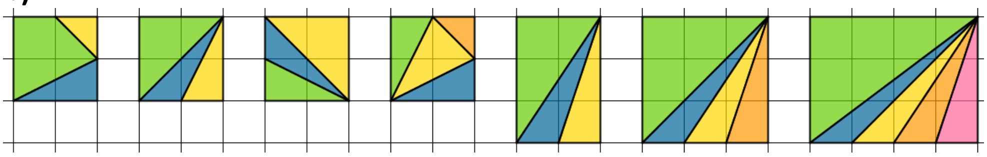
Obsah trojúhelníku T na obrázku je polovina jednoho čtverečku. To zapíšeme: $S_T = \frac{1}{2}$■. Zjistěte obsahy dalších trojúhelníků a dalších mnohoúhelníků na obrázcích. Jednotkou obsahu je jeden čtvereček (1■)



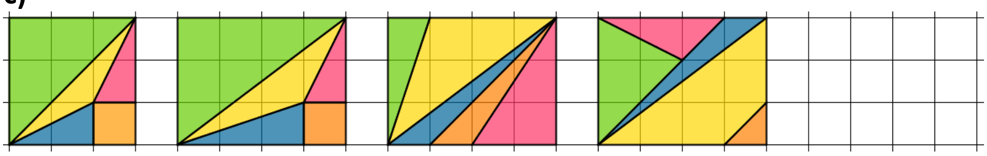
a)



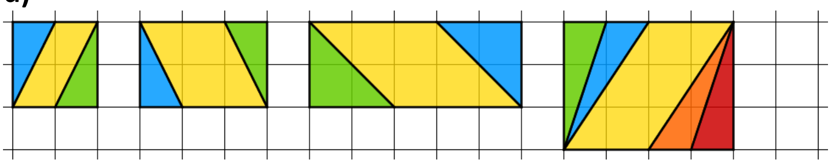
b)



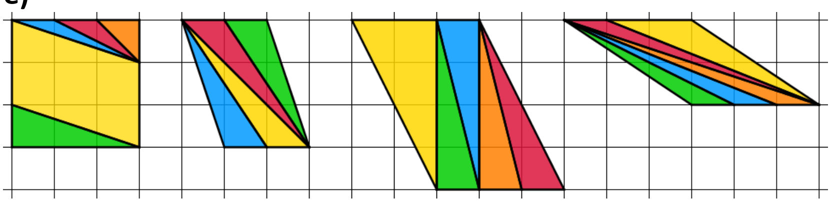
c)



d)

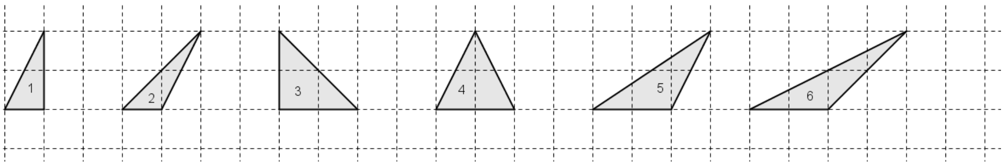


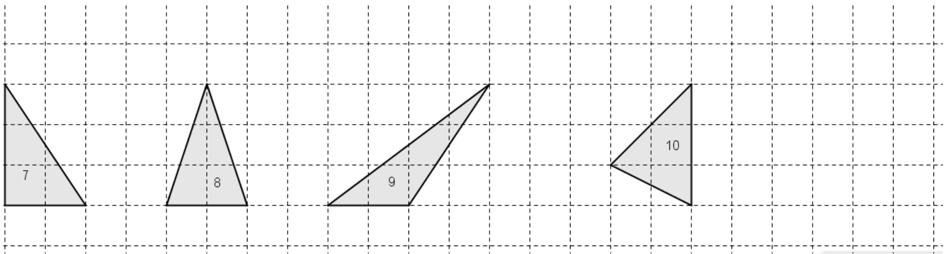
e)

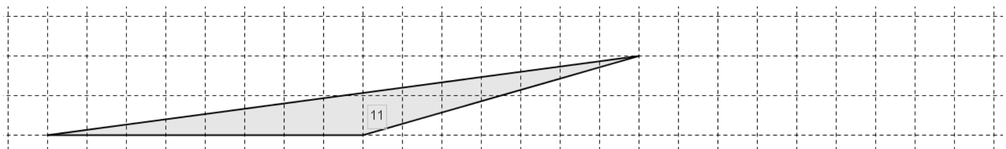


7.4 Pracovní list – doplňování trojúhelníku na rovnoběžník

Doplňte útvary na rovnoběžníky přidáním maximálně jednoho nového vrcholu. Vypočítejte obsah původního trojúhelníku a rovnoběžníků. Jednotkou obsahu je 1□. Výsledky zaznamenávej do tabulky.







	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
obsah rovnoběžníku											
obsah trojúhelníku											

7.5 Zadání post-testu

POST-TEST Jméno: ________________________

Obsahy rovinných útvarů. Třída: _________________________

U všech úloh zapisujte postup řešení.

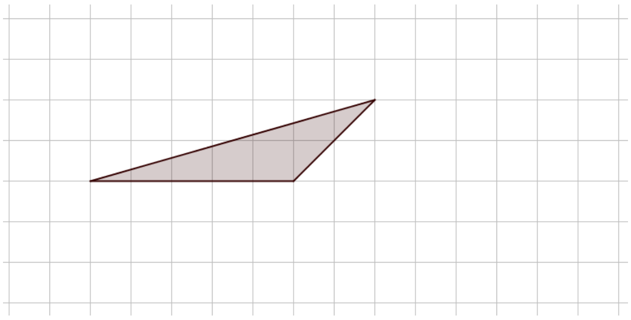
1. a) Vypočítejte obsah *kosodélníku*, pro který platí, že délka jedné jeho strany je 6 cm a délka k ní příslušné výšky je 8 cm.

   Obsah kosodélníku je: ___________________

   b) Vypočítejte obsah *trojúhelníku*, pro který platí, že délka jedné jeho strany je 6 cm a délka k ní příslušné výšky je 8 cm.

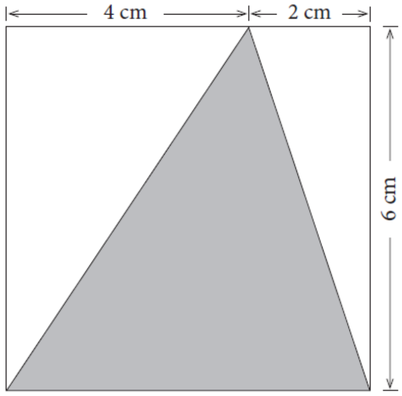
   Obsah trojúhelníku je: ___________________

2. Vypočítejte obsah mřížového trojúhelníku na obrázku, následně doplňte trojúhelník přidáním maximálně jednoho vrcholu na rovnoběžník a vypočítejte jeho obsah. Jednotka obsahu je 1□.



Obsah trojúhelníku je: ___________________ Obsah rovnoběžníku je: __________________

3. Na obrázku je uvnitř čtverce vybarvený šedý trojúhelník. Jaký je obsah vybarveného trojúhelníku?

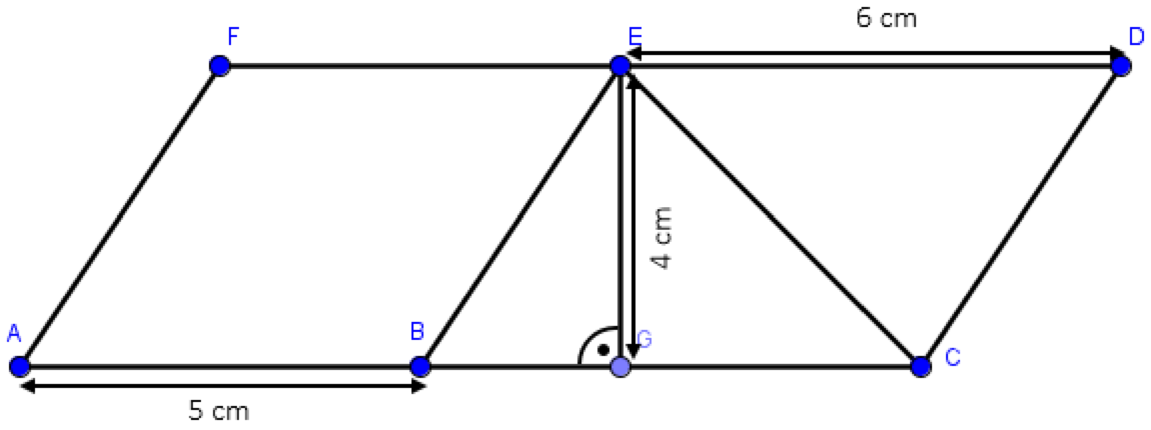


Obsah šedého trojúhelníku je: ____________________

4. Vypočítejte obsah:

a) trojúhelníku *BCE,*

b) kosodélníku *ACDF.*



Obsah trojúhelníku BCE je: ___________________________

Obsah kosodélníku ACDF je: _________________________

5. Podlaha chodby je beze zbytku pokryta obdélníkovými dlaždicemi o rozměrech 20 cm × 40 cm, kterých je přesně 1000. Jaký obsah má podlaha chodby?

(*spáry mezi dlaždicemi zanedbejte; nakreslete si například, kolik dlaždic je potřeba na pokrytí 2 m^2 podlahy; výsledek zaokrouhlete na celé číslo*)